ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XIV 1951 1

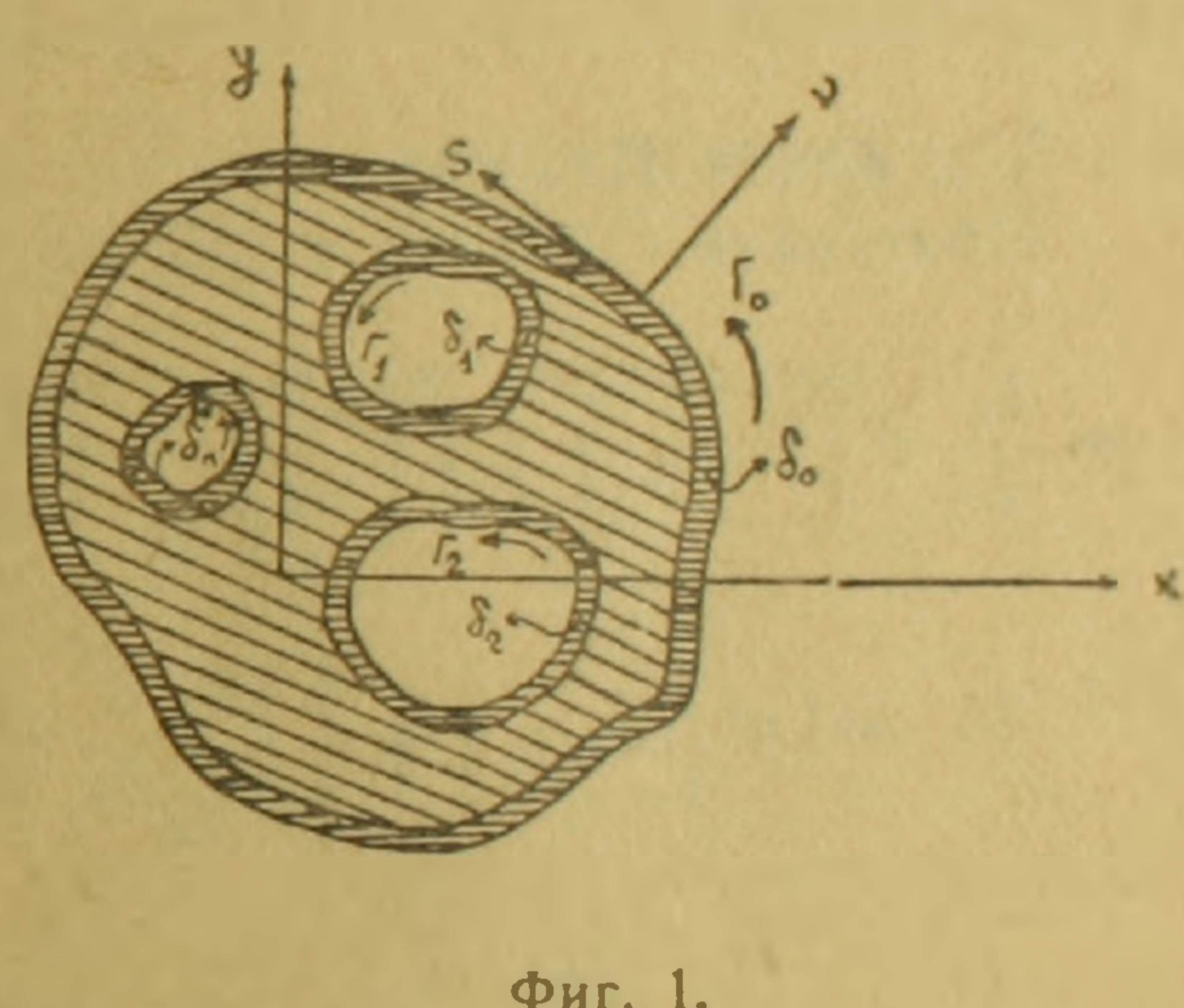
МЕХАНИКА

Б. А. Абрамян

К задаче о кручении неоднородных призматических стержней

(Представлено Н. Х. Арутюняном 19 IX 1951)

В настоящей заметке способ приближенного решения задачи о кручении неоднородных стержней с тонким усиливающим покрытием, предложенный М. В. Келдышем, обобщается на случай стержней, когда поперечное сечение стержня представляет многосвязный контур. Даются формулы для определения жесткости при кручении и напряжений.



Фиг. 1.

Обозначим внешний контур сечения через Γ_0, а внутренние через $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ (фиг. 1).

Пусть стержень покрыт вдоль боковой поверхности усиливающими слоями $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$.

Материалы усиливающих слоев берутся с модулями сдвига $G_0, G_1, \ldots G_n$, большими по сравнению с модулем сдвига G_{n+1} ядра. Толщины усиливающих слоев малы по сравнению с другими размерами сечения, так что $\delta_i \to 0$, но $\delta_i G_i \neq 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$.

При скручивании стержня парами сил, из шести компонентов напряжения, считаем отличными от нуля касательные напряжения

$$X_z = \frac{\partial F}{\partial y} G_i \tau$$
$$Y_z = -\frac{\partial F}{\partial x} G_i \tau, \qquad (1)$$

где τ — угол закручивания на единицу длины, $F(x, y)$ — функция напряжений, удовлетворяющая в области Ω сечения уравнению

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \qquad (2)$$

Ввиду незначительных толщин усиливающих слоев δ_i профиля, используя идею М. В. Келдыша [1], считаем проекции касательного напряжения Z_ν и Z_s по всей толщине слоя δ_i одинаковыми.

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних сил, проекция касательного напряжения на направление нормали равна нулю

$$Z_\nu = X_z \cos \nu x + Y_z \cos \nu y = 0. \tag{3}$$

Выведем выражения для граничных условий, исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [2, 3] как удовлетворяющих условию

$$\delta V = 0. \tag{4}$$

Потенциальная энергия неоднородного призматического стержня имеет вид:

$$V = \frac{L}{2G_{n+1}} \iint\limits_{\Omega} (X_z^2 + Y_z^2)\, dxdy + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{G_i} \int\limits_{\Gamma_i} Z_s^2 \delta_i\, ds, \tag{5}$$

где $Z_s = X_z \cos sx + Y_z \cos sy = -G_i \tau \dfrac{\partial F}{\partial \nu}$ на Γ_i, $\qquad (6)$

L — длина стержня.

Подставив (1) и (6) в (5), получим:

$$V = \frac{L}{2} \tau^2 \left\{ G_{n+1} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy + \sum_{i=0}^{n} G_i \int\limits_{\Gamma_i} \delta_i \left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right)^2 ds \right\} \tag{7}$$

$$\delta V = L\tau^2 \left\{ G_{n+1} \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta F) + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}(\delta F) \right] dxdy + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n} G_i \int\limits_{\Gamma_i} \delta_i \frac{\partial F}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta F)\, ds \right\} = 0. \tag{8}$$

Применив формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy + \iint\limits_{\Omega} P \nabla^2 Q\, dxdy = \int\limits_{\Gamma} P \frac{\partial Q}{\partial \nu} ds \tag{9}$$

и заметив, что согласно (2)

$$\nabla^2 (\delta F) = 0 \tag{10}$$

получим:

$$\int\limits_{\Gamma_0} \left[G_{n+1} F + G_0 \delta_0 \frac{\partial F}{\partial \nu} \right] \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta F)\, ds -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_i} \left[G_{n+1} F - G_i \delta_i \frac{\partial F}{\partial \nu} \right] \frac{\partial}{\partial \nu} (\delta F)\, ds = 0 \tag{11}$$

Интегрируя по частям из (11), получим:

$$\left[G_{n+1}F + G_0\delta_0\frac{\partial F}{\partial\nu}\right]_{s=l_0}\int_0^{l_0}\frac{\partial}{\partial\nu}(\delta F)ds - \int_{\Gamma_0} v(s)\frac{\partial}{\partial s}\left[G_{n+1}F + G_0\delta_0\frac{\partial F}{\partial\nu}\right]ds -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[G_{n+1}F - G_i\delta_i\frac{\partial F}{\partial\nu}\right]_{s=l_i}\int_0^{l_i}\frac{\partial}{\partial\nu}(\delta F)\,ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i} v(s)\frac{\partial}{\partial s}\left[G_{n+1}F - G_i\delta_i\frac{\partial F}{\partial\nu}\right]ds = 0, \tag{12}$$

где l_i — длина контура Γ_i.

Для гармонической функции δF, каков бы ни был простой замкнутый контур Γ, выполняется условие

$$v(l_i) = \int_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}(\delta F)\,ds = 0, \tag{13}$$

причем функция $v(s) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial\nu}(\delta F)\,ds$ — произвольна. Поэтому для выполнения условия (12) требуется равенство нулю выражений

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(G_{n+1}F + G_0\delta_0\frac{\partial F}{\partial\nu}\right) = 0 \qquad \text{на } \Gamma_0$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(G_{n+1}F - G_i\delta_i\frac{\partial F}{\partial\nu}\right) = 0 \qquad \text{на } \Gamma_i \tag{14}$$

или

$$G_{n+1}F + G_0\delta_0\frac{\partial F}{\partial\nu} = c_0 \qquad \text{на } \Gamma_0$$

$$G_{n+1}F - G_i\delta_i\frac{\partial F}{\partial\nu} = c_i \qquad \text{на } \Gamma_i \tag{15}$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

Из постоянных $c_0, c_1, \ldots c_n$ только одна может быть выбрана произвольно, остальные же должны быть определены из теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении

$$\int_{\Gamma_i}\frac{\partial F}{\partial\nu}\,ds = -2\Omega_i \quad (i = 0, 1, 2\ldots n) \tag{16}$$

Вместо системы (16) для определения неизвестных постоянных $c_0, c_1, \ldots c_n$ иногда удобно бывает пользоваться другой системой, которую получим интегрируя уравнения (15) по контурам Γ_i и используя (16)

$$\int\limits_{\Gamma_0} \frac{F}{G_0 \delta_0} ds = \frac{c_0}{G_{n+1}} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{ds}{G_0 \delta_0} + \frac{2\Omega_0}{G_{n+1}}$$

$$\int\limits_{\Gamma_i} \frac{F}{G_i \delta_i} ds = \frac{c_i}{G_{n+1}} \int\limits_{\Gamma_i} \frac{ds}{G_i \delta_i} - \frac{2\Omega_i}{G_{n+1}} \qquad i = 1, \ldots n \qquad (17)$$

Уравнения (2), (15) и (17) полностью определяют функцию напряжений $F(x, y)$ в области сечения.

Определение жесткости. Из (3) и (6), пользуясь значениями (1), для усиливающих слоев будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \nu} \cos \nu y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \nu} \cos \nu x. \qquad (18)$$

Пользуясь теперь формулой жесткости при кручении, получим

$$C = \frac{1}{\tau} \iint\limits_{\Omega} (xY_z - yX_z) dxdy = - G_{n+1} \iint\limits_{\Omega} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} G_i \int\limits_{\Gamma_i} \delta_i \frac{\partial F}{\partial \nu} (x \cos \nu x + y \cos \nu y) \, ds. \qquad (19)$$

При этом использованы соотношения (18).

Преобразуя первый интеграл правой части (19), имеем:

$$C = 2 G_{n+1} \iint\limits_{\Omega} F dxdy - \int\limits_{\Gamma_0} \left(G_{n+1} F + G_0 \delta_0 \frac{\partial F}{\partial \nu} \right) (xdy - ydx) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_i} \left(G_{n+1} F - G_i \delta_i \frac{\partial F}{\partial \nu} \right) (xdy - ydx) =$$

$$= 2 \left[G_{n+1} \iint\limits_{\Omega} F(x, y) dxdy - \Omega_0 c_0 + \sum_{i=1}^{n} \Omega_i c_i \right]. \qquad (20)$$

При этом использованы условия (15), а также соотношения

$$\cos \nu x = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \nu y = - \frac{dx}{ds} \qquad (21)$$

и значения

$$\int\limits_{\Gamma_i} (xdy - ydx) = 2\Omega_i, \qquad (22)$$

где Ω_i — площадь, заключенная контуром Γ_i.

Кручение полой неоднородной трубы. В качестве примера рассмотрим кручение полой неоднородной трубы круглого сечения (фиг. 2).

Функция напряжений $F(r)$ удовлетворяет внутри области сечения уравнению

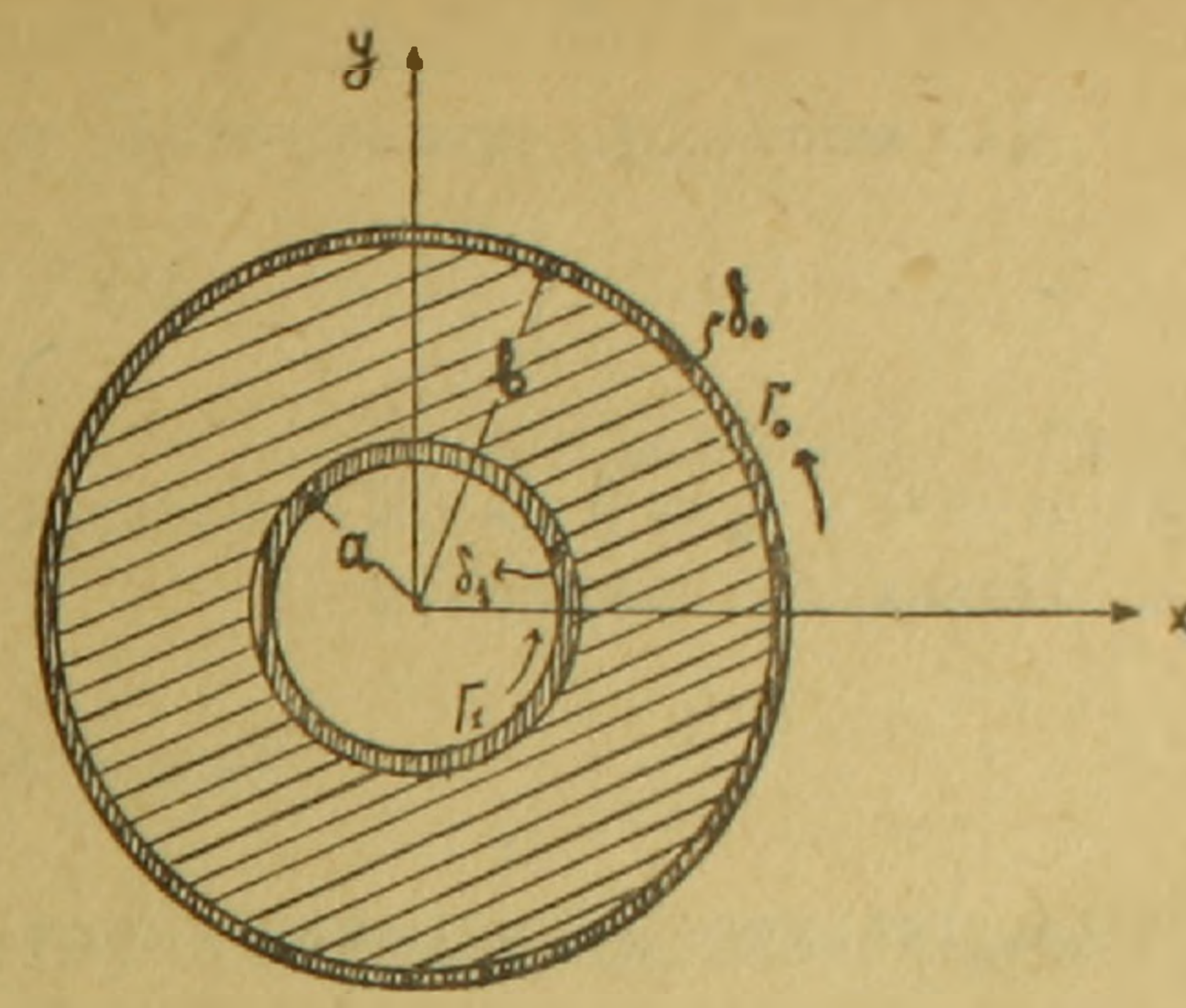
$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = -2 \quad (23)$$

и условиям

$$G_2 F + G_0 \delta_0 \frac{\partial F}{\partial r} = c_0$$ на внешнем контуре Γ_0,

(24)

$$G_2 F - G_1 \delta_1 \frac{\partial F}{\partial r} = c_1$$ на внутреннем контуре Γ_1.



Фиг. 2.

Для определения постоянных c_0 и c_1 согласно (17) получим уравнения

$$\int_{\Gamma_1} F\, ds = \frac{2\pi b}{G_2}\left(c_0 + b\, G_0 \delta_0\right)$$

(25)

$$\int_{\Gamma_1} F\, ds = \frac{2\pi a}{G_2}\left(c_1 - a\, G_1 \delta_1\right).$$

Решение уравнения (23) имеет вид:

$$F(r) = -\frac{r^2}{2} + A_1 \ln r + A_2, \tag{26}$$

где

$$A_1 = \frac{c_0 - c_1 + \frac{G_2}{2}(b^2 - a^2) + G_0 \delta_0 b + G_1 \delta_1 a}{G_2 \ln\frac{b}{a} + \frac{G_0 \delta_0}{b} + \frac{G_1 \delta_1}{a}} \tag{27}$$

$$A_2 = c_0 + G_2 \frac{b^2}{2} + G_0 \delta_0 b -$$

$$-\left(G_2 \ln b + \frac{G_0 \delta_0}{b}\right)\frac{c_0 - c_1 + \frac{G_2}{2}(b^2 - a^2) + G_0 \delta_0 b + G_1 \delta_1 a}{G_2 \ln\frac{b}{a} + \frac{G_0 \delta_0}{b} + \frac{G_1 \delta_1}{a}}. \tag{28}$$

Пользуясь уравнениями (25) для c_0 и c_1, получим значения

$$c_0 = -\left(G_0 \delta_0 b + \frac{G_2}{2} b^2\right)$$

$$c_1 = G_1 \delta_1 a - \frac{G_2}{2} a^2. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (27) и (28), получим:

$$A_1 = A_2 = 0. \tag{30}$$

Для жесткости при кручении по формуле (20) имеем.

$$C = 2\pi \left[\frac{G_2}{4} (b^4 - a^4) + G_0 \delta_0 b^3 + G_1 \delta_1 a^3 \right]. \tag{31}$$

При $a = 0$ и $\delta_0 = 0$ из (31) получается жесткость круглого стержня.

Пользуясь формулой

$$\tau_s = - G_i \tau \frac{\partial F}{\partial r}, \tag{32}$$

для касательного напряжения имеем:

$$\tau_s = G_i \tau r, \tag{33}$$

$$|\tau_s|_{max} = G_0 \tau b. \tag{34}$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Ոչ համասեռ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի վերաբերյալ

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացված է Մ. Վ. Կելդիշի կողմից առաջարկված ոչ համասեռ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման մոտավոր եղանակը այն դեպքի համար, երբ ձողերի ընդլայնական կտրվածքները իրենցից ներկայացնում են բազմակապ տիրույթներ։

Տրվում են բանաձևեր ոլորման կոշտության և լարումների որոշելու համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Х. Манукян*, Некоторые задачи теории кручения неоднородных призматических стержней (диссертация). Ереванский политехнический институт. 1950. [2] *П. Ф. Папкович*, Теория упругости, 1939, [3] *Л. С. Лейбензон*, Курс теории упругости, 1947.