ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XIV 1951 3

МЕХАНИКА

Н. Х. Арутюнян, действ. чл. АН Армянской ССР

Некоторые вопросы теории ползучести

(Представлено 22 IX 1951)

В предыдущих работах [1,2] была развита теория ползучести бетона, основанная на представлении о бетоне, как о линейном упруго-ползучем теле, т. е. предполагалось, что между деформациями ползучести и соответствующими напряжениями имеется линейная связь. По отношению мгновенных деформаций и соответствующих упруго-мгновенных напряжений также принималось наличие линейной зависимости.

Как показывают многочисленные экспериментальные данные [3,6], линейная зависимость между деформациями ползучести и соответствующими напряжениями справедлива для напряженнй, не превышающих половины временного сопротивления бетона $\frac{R}{2}$.

Что же касается мгновенных деформаций, то из целого ряда опытов [4,7] следует, что мгновенные деформации остаются прямо пропорциональными напряжениям вплоть до величин, почти соответствующих моменту разрушения.

Настоящая работа представляет дальнейшее развитие основных результатов теории ползучести бетона, полученных в предыдущих исследованиях, для более широкого диапазона изменений напряжений $\left(\text{т. е. и при } \sigma > \frac{R}{2}\right)$, а именно, когда линейная зависимость между величиной напряжения и деформацией ползучести нарушается.

Таким образом, бетон рассматривается как нелинейное упруго-ползучее тело и принимается только, что для деформации его имеет место закон наложения.

Последние исследования показали [4], что закон наложения для деформации ползучести бетона достаточно хорошо подтверждается в случае монотонно возрастающих нагрузок, т. е. для активной деформации.

1. *Продольная деформация.* Полную относительную деформацию бетонного бруса к моменту времени t под действием единичного од-

ноосного напряженного состояния, приложенного в некотором возрасте τ, как и прежде, будем определять зависимостью:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \tag{1}$$

где $\frac{1}{E(\tau)}$ — упругая часть деформации от единичного напряжения, приложенного в возрасте τ, а $C(t, \tau)$, называемая мерой ползучести бетона, представляет деформацию ползучести в момент времени t от единичного одноосного напряжения, возникшего в возрасте бетона τ.

Допустим, что к бетонному брусу в возрасте $\tau = \tau_1$ было приложено напряжение $\sigma_x = \sigma_x(\tau_1)$ и что в последующее время $t \geqslant \tau_1$ это напряжение сохраняется постоянным.

Тогда будем иметь:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \Omega[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1), \tag{2}$$

где $\Omega[\sigma_x(\tau_1)]$ — некоторая функция от $\sigma_x(\tau_1)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжением и деформацией ползучести.

При этом, как было указано, для бетонов имеет место соотношение:

$$\Omega(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{при } \sigma \leqslant \dfrac{R}{2}, \\ \omega(\sigma) & \text{при } \sigma \geqslant \dfrac{R}{2}, \end{cases} \tag{3}$$

где R — временное сопротивление бетона, причем

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{R}{2}. \tag{4}$$

Если положить, что мера ползучести бетона $C(t, \tau)$ и его модуль упругости $E(\tau)$ не зависят от возраста τ, $E(\tau) = E_0$, $C(t, \tau) = F(t)$ (т. е. не учитывать процесс старения материала), а функция $\omega(\sigma)$ является степенной функцией вида $\omega(\sigma) = \sigma^m$, где m — постоянное число, то выражение (2) примет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \sigma^m F(t). \tag{5}$$

Соотношение (5) известно в теории ползучести как зависимость, на которой базируется так называемая теория „старения“.*

---

* Следует отметить, что теория „старения“, которая излагается в различных работах, посвященных вопросам ползучести, не имеет никакого отношения к явлению старения материалов. Это объясняется тем, что пока нет установленной твердой терминологии.

Здесь следует отметить, что соотношение (5) справедливо только при постоянных напряжениях, однако часто многие авторы (Рош, Шепк) распространяют его на случай напряжений, изменяющихся во времени. Такая ошибочная трактовка уравнений (5) может нривести к ложным результатам.

Рассмотрим случай, когда в момент времени $\tau = \tau_1$ к бетонному брусу приложено напряжение $\sigma_x = \sigma_x(t)$, которое меняется с течением времени. Тогда, на основании соотношения (2) и принципа наложения, полная относительная деформация выразится зависимостью

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \Omega[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} \frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial \sigma_x(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau + \int_{\tau_1}^{t} C(t, \tau) \frac{\partial \Omega[\sigma_x(\tau)]}{\partial \tau}\, d\tau . \qquad (6)$$

Это уравнение справедливо для значений напряжения в диапазоне от нуля до величины временного сопротивления бетона R.

Интегрируя (6) по частям, получим:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} \Omega[\sigma_x(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau . \qquad (7)$$

Пользуясь условием (3), соотношение (7) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right] d\tau , \qquad (8)$$

если $\sigma_x(t) \leqslant \frac{R}{2}$

и

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} \omega[\sigma_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau)\, d\tau \qquad (9)$$

если $\sigma_x(t) > \frac{R}{2}$

при всех значениях t.

Полученное соотношение (9) представляет основное уравнение теории ползучести бетона, рассматриваемого как нелинейное упруго-ползучее тело, справедливое для напряжения в диапазоне от нуля до R.

Если в (9) $\omega(\sigma) = \sigma$, то оно переходит в уравнение для линейного упруго-ползучего тела (8), полученное ранее.

Как показывают опыты, мера ползучести бетона при растяжении и сжатии почти одинакова, поэтому уравнение (9), будучи справедливым для деформации растяжения $\sigma > 0$, может быть применено также

к деформации сжатия, только в этом случае нужно в уравнение (9) вместо σ положить $-\sigma$ и $\omega[-\sigma] = -\omega[\sigma]$, т. е. в область отрицательных σ функция $\omega[\sigma]$ продолжается нечетным образом.

2. *Поперечная деформация.* Пусть к бетонному брусу возраста $\tau = \tau_1$ в продольном направлении было приложено напряжение $\sigma_x(t) = \sigma_x(\tau_1)$, которое в последующее время $t \geqslant \tau_1$ остается постоянным. Тогда деформации в поперечном направлении могут быть разделены на две части: упруго-мгновенную, равную $\nu_1(\tau_1)\frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)}$ и ползучую, равную $\nu_2(t, \tau_1)\,\omega[\sigma_x(\tau_1)]\,C(t, \tau_1)$, где $\nu_1(\tau)$ и $\nu_2(t, \tau)$ — соответственно суть коэфициенты Пуассона для упругой и ползучей частей деформации бетона.

Коэфициент Пуассона для упругой части деформации $\nu_1(\tau)$ зависит только от возраста бетона τ, а коэфициент Пуассона для ползучей части $\nu_2(t, \tau)$ — как от возраста бетона τ, так и от продолжительности действия данной нагрузки t.

Полная поперечная деформация будет:

$$-\varepsilon_y(t) = -\varepsilon_z(t) = \left[\nu_1(\tau_1)\frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \nu_2(t, \tau_1)\,\omega[\sigma(\tau_1)]\,C(t, \tau_1)\right]. \qquad (10)$$

Если осевое напряжение σ (t), приложенное в возрасте бетона $\tau = \tau_1$ меняется с течением времени, для поперечных деформаций будем иметь следующее выражение:

$$\varepsilon_y(t) = \varepsilon_z(t) = -\frac{\nu_1(t)}{E(t)}\sigma_x(t) + \int_{\tau_1}^{t}\sigma_x(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)}\,d\tau + \int_{\tau_1}^{t}\omega[\sigma_x(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}[\nu_2(t, \tau)\,C(t, \tau)]\,d\tau. \qquad (11)$$

3. *Деформация сдвига.* Деформацию сдвига так же, как и осевую деформацию, можно разделить на две части: упруго-мгновенную и ползучую.

Пусть на бетонный образец в возрасте $\tau = \tau_1$ действует касательное напряжение $\tau_{xy}(t) = \tau_{xy}(\tau_1)$, которое в последующее время $t \geqslant \tau_1$ остается постоянным. В этом случае полная относительная деформация сдвига будет:

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{G(\tau_1)} + \omega[\tau_{xy}(\tau_1)]\,D(t, \tau_1), \qquad (12)$$

где $G(\tau)$ — мгновенный модуль сдвига, равный $\frac{E(\tau)}{2[1+\nu_1(\tau)]}$,

$D(t, \tau)$ — мера ползучести чистого сдвига для бетона.

При действии напряжения $\tau_{xy}(t)$ в возрасте $\tau = \tau_1$ и меняющегося с течением времени для полной деформации сдвига будем иметь следующее выражение:

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{G(\tau)} - \int_{\tau_1}^{t} \omega[\tau_{xy}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau)\, d\tau. \qquad (13)$$

Таким образом, деформация ползучести бетона, когда последний рассматривается как нелинейное упруго-ползучее тело, характеризуется тремя физическими величинами: мерами ползучести $C(t, \tau)$ и $D(t, \tau)$ для одноосного напряженного состояния и чистого сдвига и коэффициентом Пуассона $\nu_2(t, \tau)$ для ползучей части деформации.

Все эти величины являются функциями как возраста бетона, так и продолжительности действия нагрузки. Однако нет необходимости определять экспериментально все три функции $\nu_2(t, \tau)$, $C(t, \tau)$ и $D(t, \tau)$, характеризующие ползучие свойства данного бетона, достаточно знать какие-нибудь две из них, третья же определяется аналитическим путем совершенно аналогично, как это делается в упруго-мгновенной задаче для установления связи между E, G и ν_1.

В самом деле, в случае чистого сдвига в плоскости XOY при действии постоянных тангенциальных усилий $\tau_{xy}(\tau_1)$ главные напряжения будут:

$$\sigma_x(\tau_1) = \tau_{xy}(\tau_1), \quad \sigma_y(\tau_1) = -\tau_{xy}(\tau_1) \text{ и } \sigma_z(\tau_1) = 0. \qquad (14)$$

Относительная деформация сдвига согласно (12) есть

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{G(\tau_1)} + \omega[\tau_{xy}(\tau_1)]\, D(t, \tau_1). \qquad (15)$$

Относительное удлинение диагонали выделенного элемента в силу (2) и (10) будет:

$$\varepsilon_x(t) = \left[\frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \omega[\sigma_x(\tau_1)]\, C(t, \tau_1)\right] - \left\{\frac{\sigma_y(\tau_1) + \sigma_z(\tau_1)}{E(\tau_1)} \nu_1(\tau_1) + \right.$$
$$\left. + \left[\omega[\sigma_y(\tau_1)] + \omega[\sigma_z(\tau_1)]\right] \nu_2(t, \tau_1)\, C(t, \tau_1)\right\}. \qquad (16)$$

Подставляя значение $\sigma_x(\tau_1)$, $\sigma_y(\tau_1)$ и $\sigma_z(\tau_1)$ из (14) в (16) и замечая, что $\omega(\sigma) > 0$, $\omega(-\sigma) = -\omega(\sigma)$, получим:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{E(\tau_1)} + \omega(\tau_{xy})\, C(t, \tau_1) + \frac{\tau_{xv}(\tau_1)}{E(\tau_1)} \nu_1(\tau_1) +$$
$$+ \omega(\tau_{xy})\, \nu_2(t, \tau_1)\, C(t, \tau_1) = \frac{\tau_{xy}(\tau_1)}{2G(\tau_1)} + \omega(\tau_{xy})\, C(t, \tau_1)\, [1 + \nu_2(t, \tau_1)]. \qquad (17)$$

Вместе с тем имеет место известная геометрическая зависимость

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\gamma_{xy}(t)}{2}, \qquad (18)$$

которая должна выполняться при сдвиге для любых значений t.

Подставляя значение $\varepsilon_x(t)$ и $\gamma_{xy}(t)$ из (17) и (15) в (18), получим следующую аналитическую зависимость между мерами ползучести $C(t,\tau)$, $D(t,\tau)$ и $\nu_2(t.\tau)$:

$$D(t,\tau) = 2[1 + \nu_2(t,\tau)]\, C(t,\tau), \tag{19}$$

если $\nu_1(\tau) = \nu_2(t,\tau) = \nu = \text{const}$, то будем иметь:

$$\frac{D(t,\tau)}{C(t,\tau)} = \frac{E}{G} \tag{20}$$

т. е. при равенстве коэфициентов Пуассона упругой и ползучей частей деформации, мера ползучести бетона $C(t,\tau)$ при одномерно напряженном состоянии с точностью до постоянного множителя равна мере ползучести $D(t,\tau)$ при чистом сдвиге.

4. *Объемное напряженное состояние.* Пользуясь соотношениями (9), (11) и (13), можно получить основные зависимости для случая пространственного напряженного состояния, если, следуя Ю. Н. Работнову ([5]), воспользоваться теорией малых упруго-пластических деформаций.

Зависимость между напряжениями σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} и деформациями ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} в теории малых упруго-пластических деформаций, когда сжимаемостью материала можно пренебречь,* дается формулами:

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xz} \tag{21}$$

$$\sigma_z - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}\varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]$, а σ_i и ε_i — интенсивности тензора напряжения и тензора деформации.

Если считать, что интенсивности напряжения σ_i и деформации ε_i при объемном напряженном состоянии связаны между собой той же зависимостью, что и напряжения и деформации в одномерной задаче, а именно:

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{E(\tau)}\,d\tau - \int_{\tau_1}^{t} \omega(\sigma_i)\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

то, присоединяя это соотношение с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\sigma_x\cos(nx) + \tau_{xy}\cos(ny) + \tau_{xz}\cos(nz) = F_{nx}\\
&\tau_{xy}\cos(nx) + \sigma_y\cos(ny) + \tau_{yz}\cos(nz) = F_{ny}\\
&\tau_{xz}\cos(nx) + \tau_{yz}\cos(ny) + \sigma_z\cos(nz) = F_{nz}
\end{aligned} \tag{23}$$

---

* Заметим, что условие несжимаемости материала не является существенным.

к уравнениям (21), приходим к полной системе нелинейной теории ползучести бетона в напряжениях.

5. *Приведение интегральных соотношений теории ползучести* (9), (22) *к дифференциальным уравнениям.* Будем определять меру ползучести бетона $C(t, \tau)$ функцией вида:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]. \tag{24}$$

Здесь $\varphi(\tau)$ — некоторая функция только возраста τ, определенная из опыта и характеризующая процесс старения данного бетона.

Тогда интегральное уравнение (9), связывающее напряжение $\sigma_x(t)$ с учетом ползучести и переменного модуля упругости бетона с соответствующей деформацией $\varepsilon_x(t)$, примет вид:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - \int_{\tau_1}^{t} \omega[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{25}$$

Принятое выражение (24) для $C(t, \tau)$ позволяет свести решение уравнения (25) к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэфициентами.

В самом деле, дифференцируя обе части уравнения (25) по t, получим:

$$\varepsilon_x'(t) = \frac{\sigma_x'(t)}{E(t)} + \gamma\varphi(t)\,\omega[\sigma_x(t)] - \gamma \int_{\tau_1}^{t} \omega[\sigma_x(\tau)]\,[\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)]\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \tag{26}$$

Исключая значение интеграла $\int_{\tau_1}^{t} \omega[\sigma_x(\tau)]\,[\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)]\, e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$

из соотношений (26) и (25) и дифференцируя полученный результат еще раз по t, после некоторых преобразований придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$\sigma''(t) + \sigma'(t)\left[\gamma - \frac{E'(t)}{E^2(t)}\right] + \gamma E(t)\,\varphi(t)\,\omega'[\sigma]\,\sigma'(t) = E(t)\,[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)] \tag{27}$$

с начальными условиями при $t = \tau_1$, $\sigma(\tau_1) = E(\tau_1)\,\varepsilon(\tau_1)$

$$\sigma'(\tau_1) = \varepsilon'(\tau_1)\,E(\tau_1) - \gamma E(\tau_1)\,\varphi(\tau_1)\,\omega[\varepsilon(\tau_1)\,E(\tau_1)]. \tag{28}$$

Если модуль упругости бетона изменяется во времени незначительно и практически его можно считать постоянным, то уравнение (27) примет вид:

$$\sigma''(t) + \gamma\sigma'(t) + \gamma E_0\,\varphi(t)\,\omega'[\sigma]\,\sigma'(t) = E_0[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)]. \tag{29}$$

Начальные же условия будут:

$$\sigma(\tau_1) = E_0\,\varepsilon(\tau_1),$$
$$\sigma'(\tau_1) = E_0\,\varepsilon'(\tau_1) - \gamma E_0\,\varphi(\tau_1)\,\omega[E_0\,\varepsilon(\tau_1)]. \tag{30}$$

Если в соотношении (29) заменить функцию $\varphi(t)$ ее предельным значением $\varphi(\infty) = C_0$, то полученное уравнение будет характеризовать состояние ползучести для стареющих бетонов.

Согласно (29) и принимая во внимание второе из условий (30), будем иметь:

$$\sigma'(t) + \gamma\sigma(t) + \gamma E_0 C_0 \omega[\sigma] = E_0 [\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)], \qquad (31)^*$$

с начальным условием

$$\sigma(\tau_1) = E_0 \varepsilon(\tau_1). \qquad (32)$$

Перепишем уравнение (31) в следующем виде:

$$\frac{\sigma'(t)}{E_0} + \gamma \frac{\sigma(t)}{E_0} + \gamma C_0 \omega[\sigma] = \varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t). \qquad (33)$$

Отбросим в этом уравнении слагаемые, относящиеся к скорости упругой деформации, считая ее малой по сравнению с деформацией ползучести при больших значениях t. Тогда из (33) будем иметь:

$$\varepsilon^{0\prime}(t) + \gamma\varepsilon^0(t) = \gamma C_0 \omega[\sigma] + \gamma \frac{\sigma(t)}{E}, \qquad (34)$$

или

$$\varepsilon^0(t) = \frac{\gamma}{E} \int_{\tau_1}^{t} [\sigma(\tau) + C_0 E \cdot \omega[\sigma]] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \qquad (35)$$

Если в уравнении (33) пренебречь как скоростью, так и величиной упругой деформации, то из соотношения (35) получим:

$$\varepsilon^0(t) = \gamma C_0 \int_{\tau_1}^{t} \omega(\sigma) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \qquad (35')$$

Здесь $\varepsilon^0(t)$ — деформация ползучести при больших значениях t.

Соотношение (34) или (35) — есть уравнение установившейся ползучести бетона, понимаемого в более общем смысле, чем обычно, т. к. скорости деформации здесь оказываются уже не постоянными, а переменными.

Заметим, что уравнения (34) — (35′) справедливы при постоянстве действующих внешних нагрузок.

Положим, что $\omega[\sigma]$ является степенной функцией вида

$$\omega[\sigma] = \sigma + \beta\sigma^2. \qquad (36)$$

Опыты показывают, что функция вида (36) хорошо описывает данные экспериментов и характерна тем, что в большинстве случаев обладает слабой нелинейностью, т. е. параметр β оказывается малым ($\beta \ll 1$).

Подставляя значения $\omega[\sigma]$ из (36) в (27), приведем последнее к следующему виду:

---

* Следует особо отметить, что решение уравнения (31) представляет асимптотическое решение уравнения (29) при достаточно больших t.

$$\sigma''(t) + \sigma'(t)\left[\gamma\left[1 + E(t)\,\varphi(t)\right] - \frac{E^1(t)}{E^2(t)}\right] +$$

$$+ 2\beta\gamma\,\varphi(t)\,\sigma(t)\,\sigma'(t) = E(t)\left[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)\right]. \quad (37)$$

При постоянном модуле упругости уравнение (37) примет вид:

$$\sigma''(t) + \sigma'(t)\,\gamma\left[1 + E_0\,\varphi(t)\right] + 2\beta\gamma\,E_0\,\varphi(t)\,\sigma'(t)\,\sigma(t) = E_0\left[\varepsilon''(t) + \gamma\varepsilon'(t)\right]. \quad (38)$$

Для состояния ползучести при старом и стареющем возрасте бетона, согласно (31) и (36), получим следующее уравнение:

$$\sigma'(t) + a\sigma(t) + b\sigma(t)^2 = E_0\left[\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)\right], \quad (39)$$

где

$$a = \gamma\left[1 + E_0\,C_0\right];$$

$$b = \beta\gamma E_0\,C_0 = \beta(a - \gamma),$$

которое представляет обобщенное уравнение Риккати и может быть представлено в форме:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{a\,du(t)}{dt} = b\,E_0\left[\varepsilon'(t) + \gamma\varepsilon(t)\right], \quad (40)$$

где

$$\sigma(t) = \frac{u'(t)}{b\,u(t)}.$$

Приложение полученных результатов к решению конкретных задач по расчету элементов инженерных сооружений на ползучесть составляет содержание следующего сообщения.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Սողքի տեսության մի քանի հարցեր

Տվյալ աշխատանքում զարգացվում ու ընդհանրացվում են բետոնի սողքի տեսության այն հիմնական արդյունքները, որոնք ստացված են մեր նախորդ հետազոտություններում։

Դիտելով բետոնը որպես ոչ գծային առաձգա-սողքային մարմին, այսինքն երբ նրա մեջ լարումների և դեֆորմացիաների գծային կապը խախտվում է, աշխատանքում տրված են բետոնի սողքի տեսության հիմնական հավասարումները պարզ և բարդ լարված վիճակների դեպքում։

Ստացված հավասարումները կիրառելի են լարումների փոփոխման լայն դիապազոնում սկսած զերոյից մինչև բետոնի ժամանակավոր R դիմադրությունը։

Նշված է սողքի չափի ֆունկցիայի այն տեսքը, որը հնարավորություն է տալիս հաշվի առնել բետոնի ծերացման պրոցեսի հատկությունները և սողքի հիմնական բնութագրալ հավասարումները բերել ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ т. XIII, в. 6. 1949. [2] *Н. Х. Арутюнян*, ДАН Арм. ССР, VII, № 5, 1947. [3] *Я. Столяров*, Введение в теорию железобетона, 1941. [4] *П. И. Васильев*, Пластические свойства бетона при сжатии и их влияние на работу некоторых элементов бетонных и железобетонных конструкций. (Автореферат), 1951. [5] *Ю. Н. Работнов*, Вестник Моск. Гос. Ун-та им. Ломоносова № 10, 1948. [6] *И. И. Улицкий*, Ползучесть бетона, 1948. [7] *С. Е. Фрайфельд*, Собственные напряжения в железобетоне, 1941.