

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О представимости и единственности аналитических функций

(Представлено А. Л. Шагиняном 18 IX 1951)

Задача о единственности тех или иных классов аналитических функций при задании их последовательных производных на некотором счетном множестве точек $\{x_n\}$ впервые исследовалась В. Л. Гончаровым. Им были введены особые интерполяционные ряды (ряды Абеля—Гончарова), при этом установление критериев разложимости функций в ряды такого вида по значениям их последовательных производных на последовательности точек $\{x_n\}$ сводилось к точной оценке некоторых кратных интегралов^(1,2).

Опираясь лишь на аппарат ряда Тейлора и на теорию бесконечных систем линейных уравнений, представляется возможным указать общий критерий для разложимости некоторых классов аналитических функций в интерполяционный ряд типа Абеля—Гончарова. Из этого результата следует ряд теорем единственности. В настоящей заметке нами за неимением места эти результаты приводятся без доказательства.

1°. Отнесем к классу $A_\lambda(\rho, \sigma)$ все целые функции порядка ρ и типа меньшего σ , которые в окрестности $z=0$ представлены рядом Тейлора вида:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n} \quad (1)$$

где $\{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность возрастающих натуральных чисел ($\lambda_1 \geq 0$).

Пусть μ_n — любая другая последовательность натуральных чисел, причем $\mu_n \leq \lambda_n < \mu_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Полином степени λ_p вида

$$Q_p(z) = \sum_{i=1}^p C_i z^{\lambda_i} \quad (2)$$

единственным образом определяется из условий

$$Q_p^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, 2, \dots, p-1 \\ 1 & \text{„ } k = p \end{cases} \quad (3)$$

для любой последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}$. Нетрудно видеть, что в явной форме полином $Q_p(z)$ напишется в следующей интегральной форме

$$Q_p(z) = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{\mu_1-2}} dz_{\mu_1-1} \int_{\alpha_1}^{z_{\mu_1-1}} dz_{\mu_1} \int_0^{z_{\mu_1+1}} dz_{\mu_1+1} \dots$$

$$\dots \int_0^{z_{\mu_i-2}} dz_{\mu_i-1} \int_{\alpha_i}^{z_{\mu_i-1}} dz_{\mu_i} \int_0^{z_{\mu_i+1}} dz_{\mu_i+1} \dots \int_0^{z_{\lambda_p-2}} dz_{\lambda_p-1} \int_0^{z_{\lambda_p-1}} dz_{\lambda_p} \int_0^{\alpha_p} dz_{\mu_p} \int_0^{z_{\mu_p+1}} dz_{\mu_p+1} \dots$$

$$\dots \int_0^{z_{\lambda_p-1}} dz_{\lambda_p} \quad (4)$$

Заметим, что при $\lambda_k = \mu_k = k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) полином $Q_p(z)$ представляет собой полином Абеля—Гончарова.

Обозначим:

$$I_k(d) = \frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{p}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{p}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} |\alpha_k|^{\lambda_{n+k} - \lambda_k} \quad (5)$$

где $d = (\sigma \rho e)^{\frac{1}{p}} e^{-1}$. Имеет место

Теорема I. Если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup I_k(d) < 1 \quad (6)$$

то для любой функции $f(z) \in A_\lambda(\rho, \sigma)$ имеет место равномерно сходящееся в любой замкнутой части плоскости разложение вида

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} f^{(\mu_p)}(\alpha_p) Q_p(z). \quad (7)$$

Отметим, что условие (6), вообще говоря, необходимо для справедливости разложения (7).

Именно можно построить последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и функцию $f_1(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ таким образом, чтобы имело место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup I_k(d) = 1, \quad f_1(z) \neq \sum_{p=1}^{\infty} f_1^{(\mu_p)}(\alpha_p) Q_p(z).$$

Следствие: Если $f(z) \in A_\lambda(\rho, \sigma)$, $f^{(\mu_p)}(\alpha_p) = 0$ ($p = 1, 2, \dots$), то для $f(z) \equiv 0$ достаточно и, вообще говоря, необходимо, чтобы имело место условие (6).

При справедливости разложения (7) условимся называть $\{\alpha_n\}$ множеством разложимости и единственности.

2°. Установлен следующий результат о существовании целой функции с заданной системой значений ее производных на множестве единственности.

Теорема II. а) Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup I_k(d) < 1$ и для последовательности $\{b_k\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{(\lambda_k - \mu_k)! |b_k|}{\left(d_1 \lambda_k^{1 - \frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k - \mu_k}} < +\infty \quad (8)$$

где $0 < d_1 < d$, то существует единственная функция $f(z) \in A_\lambda(\rho, \sigma)$, удовлетворяющая условиям $f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = b_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

б) Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup I_k(d) < +\infty$, то для любой функции $f(z) \in A_\lambda(\rho, \sigma)$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{(\lambda_k - \mu_k)! |f^{(\mu_k)}(\alpha_k)|}{\left(d \lambda_k^{1 - \frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k - \mu_k}} < +\infty$$

3°. Из вышеприведенного критерия разложимости в интерполяционный ряд вытекает ряд следствий при частных предположениях о распределении последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$. Предположим, что при целом $\rho \geq 1$

$$\mu_n = \rho n + r \quad (0 \leq r \leq \rho - 1), \quad \lambda_n = \rho n + q \quad (r \leq q \leq \rho + r - 1),$$

тогда имеет место

Теорема III. Если для последовательности $\{\alpha_n\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup k^{1 - \frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \frac{\eta_\rho}{(\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}}} \rho^{\frac{1}{\rho} - 1} \quad (9)$$

где η_ρ — корень трансцендентного уравнения

$$\sum_{i=0}^{\rho-1} \omega^{-q-r+i} e^{\omega^i \eta_\rho} = \frac{2\rho \eta_\rho^{q-r}}{(q-r)!} \left(\omega = e^{\frac{2\pi}{\rho} i} \right), \quad (10)$$

то $\{\alpha_n\}$ является множеством разложимости и единственности для класса $A_\lambda(\rho, \sigma)$.

Следствие. Если $f(z)$ целая функция порядка ρ и типа $< \sigma$, удовлетворяющая условиям вида $f^{(k)}(\alpha_k) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup k^{1 - \frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \frac{\log 2}{\frac{1}{(\sigma \rho)^\rho}} \quad (11)$$

то $f(z) \equiv 0$.

Заметим, что результат следствия при $\rho = 1$ был получен ранее другим образом (³).

4°. Установлен также следующий критерий разложимости и единственности при предположении $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \infty$.

Теорема IV. Если при $\rho \leq 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{|\alpha_k|}{\frac{1}{\lambda_{k+1}^\rho} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \mu_k)^\rho}} < \frac{1}{(\sigma \rho e)^{\frac{1}{\rho}}}, \quad (12)$$

то $\{\alpha_k\}$ будет множеством разложимости и единственности для класса $A_\lambda(\rho, \sigma)$.

При дополнительных ограничениях, налагаемых на последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, можно установить соответствующий результат для класса $A_\lambda(\rho, \sigma)$, когда $\rho > 1$.

5°. Отнесем к классу $B_\lambda(R)$ функции голоморфные в круге радиуса большего R и представимые рядом вида (1).

Обозначая

$$F_k(R) = \frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\lambda_k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+k}!}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \left(\frac{|\alpha_k|}{R} \right)^{\lambda_{n+k} - \lambda_k},$$

имеем:

Теорема I. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup F_k(R) < 1$, то для любой функции $f(z) \in B_\lambda(R)$ имеет место равномерно сходящееся в любой замкнутой части круга $|z| < R$ разложение вида

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} f^{(\mu_p)}(\alpha_p) Q_p(z),$$

где полиномы $Q_p(z)$ имеют прежний смысл.

Заметим, что при $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup F_k(R) = 1$ это разложение может не сходиться к соответствующей функции.

В случае распределения последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ как в 3°, имеет место

Теорема III¹. Если для последовательности $\{\alpha_n\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup k |\alpha_k| < R \frac{\eta_0}{\rho},$$

где η_ρ имеет тот же смысл, что и в 3^0 , то $\{\alpha_n\}$ является множеством разложимости и единственности для класса функций $B_\lambda(R)$.

Следствие. Если $f(z)$ голоморфна в круге радиуса большего R и $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup k |\alpha_k| < R \log 2,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Результат следствия был ранее установлен Какейя (⁴) другим способом.

В случае, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \infty$, имеет место следующий результат.

Теорема IV¹, Если

$$0 < \omega < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < \Omega < 1$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |\alpha_k| < R(1 - \Omega) \omega^{\frac{\Omega}{1-\Omega}},$$

то $\{\alpha_n\}$ является множеством разложимости и единственности для класса $B_\lambda(R)$.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ԶՐԲԱՆՅԱՆ

ԱՆՈՒՅԻԼ ԳՈՒՆԿՑԻՈՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱԳՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻՎԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ներկա հոդվածում առանց ապացույցի բերված են մի քանի արդյունքներ անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացնելիության և միակության մասին, երբ տրվում են ֆունկցիայի ածանցյալները կետերի հաշվելի բազմության վրա:

ЛИТЕРАТУРА--ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. Л. Гончаров, Ann. Ec. Norm., t. 47, pp. 1—78, 1930. ² В. Л. Гончаров—Усп. мат. наук, вып. 3, 113—143, 1937. ³ С. Такенака—Proc. Physico—Math. Soc. Japan, 529—542, 14, 1932. ⁴ С. Какейя, Proc Physico—Math. Soc. Japan. 14, 125—138, 1932.