ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XIII 1951 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. И. Тер-Степанян

О канонических формах уравнений цепных номограмм

(Представлено А. Г. Назаровым 23 I 1951)

Номографирование уравнения со многими переменными вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

методом многократного выравнивания точек состоит в разъединении переменных заданного уравнения для получения эквивалентной ему системы уравнений с тремя переменными в каждом:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \rho_1) = 0 \\ f_2(\rho_1, x_3, \rho_2) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n-2}(\rho_{n-3}, x_{n-1}, x_n) = 0 \end{array}\right| \tag{2}$$

где $\rho_1, \rho_2 \ldots\ldots \rho_{n-3}$ вспомогательные функции; и в построении для каждого из уравнений системы (2) номограммы из выравненных точек. Условиями номографируемости являются: *а*—возможность разъединения переменных уравнения (1) и получения заменяющей его системы уравнений (2); *б*—возможность построения для каждого из уравнений системы (2) номограммы из выравненных точек; и *в*—общность шкал для вспомогательных функции $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-3}$ [1, 2, 3].

Номограммы, построенные для отдельных уравнений системы (2) были названы з в е н ь я м и* номограммы уравнения (1). В общем случае уравнения системы (2) являются различными в номографическом отношении элементами, в соответствии с чем отдельные звенья номограммы уравнения (1) будут обладать различной геометрической структурой. Однако геометрическая структура отдельных звеньев номограммы

* М. В. П е н т к о в с к и й называет их элементарными номограммами [3]. Н. А. Г л а г о л е в называет отдельные уравнения системы (2) звеньями цепи уравнений [1].

не может быть независимой друг от друга, так как шкалы вспомогательных функции $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_{n-3}$ обязательно должны быть общими. Номограммы уравнений со многими переменными, построенные по этому принципу, называются составными номограммами.

Номографический порядок уравнений. Для морфологической характеристики составных номограмм следует установить их номографический порядок. Номографическим порядком уравнения со многими переменными назовем число различных функций переменных, получающихся после развертывания цепи уравнений Соро, исключения вспомогательных функции и упрощения.

Низший возможный порядок номографического уравнения с n переменными будет n-ный, так как это означает, что каждое переменное представлено в виде одной функции. Эта функция может входить в строку уравнения Соро, относящуюся к данному переменному, или только в столбец, отвечающий ординатам (шкала прямолинейна и вертикальна), или только в столбец, отвечающий абсциссам (шкала прямолинейна и горизонтальна), или, наконец, в оба столбца (шкала прямолинейна и наклонна, или же шкала криволинейна); в этом последнем случае, после развертывания определителя и его упрощения, остается опять таки только одна функция переменного. Уравнения, порядок которых соответствует числу независимых переменных, будем называть изономными номографическими уравнениями (т. е. уравнениями равного номографического порядка).

Высший возможный порядок номографического уравнения с n переменными будет $2n$-ный, когда все функции в цепи уравнений Соро различны, и когда после развертывания определителей и исключения вспомогательных функции, упрощение и сокращение не приводит к уменьшению числа функций заданных переменных. Таким образом, в этом случае и абсциссы, и ординаты каждой из шкал являются различными функциями переменных. Отсюда следует, что число различных функций переменных, с которыми придется оперировать, будет вдвое больше числа переменных исследуемого уравнения. Во всех остальных случаях число m различных функций переменных будет находиться в пределах между n и $2n$. Уравнения, порядок которых выше числа переменных $(n < m \leqslant 2n)$, будем называть номографическими уравнениями высших порядков.

Данное выше определение номографического порядка уравнения со многими переменными является общим, и заключает в себе тот критерий разрешимости в номограммах из выравненных точек, которым пользуются при исследовании уравнений с тремя переменными. Оно объясняет, почему в теории номографирования функции с тремя переменными для уравнений высших порядков не рассматриваются случаи, когда аргумент представлен более, чем двумя существенно различными функциями. Логика этого требования ясна из рассмотрения уравнения Соро.

Цепные номограммы. Совершенно особенное место среди составных номограмм для функции многих переменных занимают цепные номограммы. Цепными номограммами для функции многих переменных нами были названы составные изономные номограммы из многократно выравненных точек, звенья которых состоят из одинаковых в номографическом отношении элементов и следовательно обладают одинаковой геометрической структурой. Под номографически одинаковыми элементами понимаются звенья, обладающие одинаковым номографическим порядком, одним и тем же жанром и одной и той же канонической формой уравнения.

При разъединении переменных в уравнении цепных номограмм получается система уравнений третьего номографического порядка, так как уравнения цепных номограмм имеют равный порядок, и число переменных равно числу функции.

Геометрическая структура звеньев цепных номограмм тесно связана с их жанром. Известно, что номограммы третьего номографического порядка могут иметь нулевой жанр (три прямолинейные шкалы), второй жанр (две криволинейные шкалы на общем носителе—кривой второго порядка и одна прямолинейная шкала) и третий жанр (три криволинейные шкалы на общем носителе—уникурсальной кривой третьего порядка). В соответствии с этим различаются цепные номограммы нулевого, второго и третьего жанров.

Было указано, что общность шкал вспомогательных функций является необходимым условием построения составных номограмм. Требование, чтобы все звенья этих номограмм представляли собой одинаковые в номографическом отношении элементы не позволяет произвольно назначать шкалы для заданных и вспомогательных функций, а обязывает подчинять это определенному порядку.

Легко видеть, что в цепных номограммах нулевого жанра шкалы вспомогательных функций должны располагаться на однородных, напр. параллельных носителях; на них же должны находиться шкалы первой функции независимой переменной и ответная шкала функции зависимой переменной (в ряде отношений все эти шкалы имеют много общего). В цепных номограммах второго жанра эти последние шкалы должны быть расположены на общем криволинейном носителе; все же шкалы для остальных функций независимых переменных должны быть прямолинейными. В цепных номограммах третьего жанра шкалы всех функций, как заданных, так и вспомогательных, располагаются на общем криволинейном носителе. Отсюда видно, что звенья цепных номограмм второго и третьего жанров являются слившимися.

Цепные номограммы второго и нулевого жанров являются теми частными случаями цепной номограммы третьего жанра, когда кривая третьего порядка распадается на кривую второго порядка и прямую, или на три прямых. Так как общий носитель цепной номограммы третьего жанра представляет собой, по существу, результат совмещения ряда одинаковых уникурсальных кривых третьего порядка, то при таком распадении каждой кривой третьего порядка могут получиться совпадающие кривые второго порядка и прямые, или по три прямых. Отсюда делается ясным, почему номограммы третьего номографического порядка не могут быть первого жанра: для получения одной криволинейной и двух прямолинейных шкал необходимо иметь кривую по крайней мере четвертого порядка. Отсюда также понятно, почему обе криволинейные шкалы номограмм второго жанра должны обязательно иметь общего носителя.

Канонические формы уравнений цепных номограмм. Среди уравнений цепных номограмм можно различить три канонические (основные) формы уравнений. При этом цепные номограммы нулевого жанра могут относиться только к первой или второй каноническим формам уравнений; как известно, номограмм нулевого жанра для уравнений, приведенных к третьей канонической форме, построить нельзя ([1]). Цепные номограммы второго и третьего жанров имеют все три канонические формы уравнений.

Первая каноническая форма уравнений цепных номограмм имеет вид:

$$f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x_{n-1}) = f_n(x_n) \qquad (3)$$

При разъединении переменных этого уравнения получается система уравнений первой канонической формы третьего номографического порядка вида:

$$f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \rho_1$$

и т. д. Цепные номограммы нулевого жанра первой канонической формы уравнений представляют собой цепь зет-номограмм, т. е. цепь, состоящую из параллельных шкал для первой заданной функции независимой переменной, для всех вспомогательных функций и для функции зависимой переменной, и из наклонных шкал для всех остальных функций независимых переменных. Цепные номограммы второго жанра этой канонической формы представляют собой кривую второго порядка с теми же шкалами, которые в номограммах нулевого жанра имеют параллельные носители, и пересекающие эту кривую прямолинейные шкалы остальных функций. Цепные номограммы третьего жанра первой канонической формы уравнений имеют общий для всех шкал носитель—уникурсальную кривую третьего порядка с узловой точкой.

Вторая каноническая форма уравнений цепных номограмм имеет вид:

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots\ldots + f_{n-1}(x_{n-1}) = f_n(x_n). \qquad (4)$$

При разъединении переменных этого уравнения получается система уравнений второй канонической формы третьего номографического порядка вида:

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) = \rho_1$$

и т. д. Цепные номограммы нулевого жанра второй канонической формы уравнений представляют собой цепь, состоящую из звеньев, имеющих по три параллельных шкалы. Исследованию цепных номограмм этого типа посвящены работы автора ([4,5]).

Цепные номограммы второго жанра второй канонической формы уравнений представляют собой кривую второго порядка с теми же шкалами, что и в случае цепных номограмм первой канонической формы уравнении, и касающиеся этой кривой прямолинейные шкалы остальных функций. Цепные номограммы третьего жанра второй канонической формы уравнений имеют общий для всех шкал носитель— уникурсальную кривую третьего порядка с точкой возврата.

Третья каноническая форма уравнений цепных номограмм при разъединении переменных приводится к системе уравнений с тремя переменными в каждом, относящихся к третьей канонической форме уравнений третьего номографического порядка вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f_1(x_1)+f_2(x_2)}{f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)-1}=\rho_1 \\ &\frac{\rho_1+f_3(x_3)}{\rho_1\cdot f_3(x_3)-1}=\rho_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\rho_{n-3}+f_{n-1}(x_{n-1})}{\rho_{n-3}\cdot f_{n-1}(x_{n-1})-1}=f_n(x_n) \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Цепные номограммы второго жанра третьей канонической формы уравнений представляют собой кривую второго порядка с теми же шкалами, что и в случае цепных номограмм первой канонической формы уравнений, и не пересекающие эту кривую прямолинейные шкалы остальных функций. Цепные номограммы третьего жанра третьей канонической формы уравнений имеют общий для всех шкал носитель—уникурсальую кривую третьего порядка с изолированной точкой.

Указанные канонические формы уравнений цепных номограмм могут комбинироваться друг с другом и давать уравнения составных номограмм. Среди различных сочетаний практически наиболее осуществимой и удобной для построения является номограмма уравнения вида:

$$f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\ldots f_{k-1}(x_{k-1})+f_k(x_k)+f_{k+1}(x_{k+1})+\ldots+ \\ +f_{n-}(x_{n-1})=f_n(x_n) \qquad (10)$$

Решение составной номограммы этого уравнения, представляющего собой сочетание уравнений цепных номограмм первой и второй канонических форм может быть осуществлено теми же приемами расчета и построения, какие применяются для цепных номограмм.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР
Ереван, 1951, январь.

ԳԵՈՐԳ ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Շղթայավոր նոմոգրամների հավասարությունների կանոնավոր ձևերի մասին

Մի քանի փոփոխականներով հավասարության (1) համար կարելի է կառուցել հավասարեցված կետերից նոմոգրամ, եթե այդ հավասարությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1. Եթե այդ հավասարությունը կարելի է փոխարինել էկվիվալենտ հավասարությունների սիստեմայով (2), որոնցից յուրաքանչյուրն ունեն երեք փոփոխական, որտեղ $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-3}$ օժանդակ ֆունկցիաներ են։

2. Եթե ամեն մի հավասարության համար կարելի է կառուցել հավասարեցված կետերից նոմոգրամ։

3. Եթե օժանդակ ֆունկցիաների շկալաներն ընդհանուր են։ Նոմոգրամները, որոնք կառուցվում են (2) սիստեմայի տարբեր հավասարությունների համար, կոչվում են նոմոգրամի օղակներ, իսկ ինքը նոմոգրամը, որը բաղկացած է մի քանի օղակից,— կազմված նոմոգրամ։

Ընդհանուր դեպքում կազմված նոմոգրամի տարբեր օղակներն իրենցից ներկայացնում են նոմոգրաֆիկ տեսակետից տարբեր էլեմենտներ, այսինքն նրանք կարող են տարբերվել իրենց կարգով, ժանրով և կանոնավոր ձևով, հետևաբար այդ օղակները պետք է ունենան տարբեր երկրաչափական կառուցվածք։

Մի քանի փոփոխականներով հավասարության նոմոգրաֆիկ կարգը կոչվում է փոփոխականների տարբեր ֆունկցիաների թիվը Սորոյի հավասարությունների շղթայում, օժանդակ ֆունկցիաները բացառելուց, կազմալուծելուց և պարզեցնելուց հետո։

n փոփոխականների նոմոգրաֆիկ հավասարության հնարավոր ամենացածր կարգը կլինի n, իսկ ամենաբարձր կարգը կլինի $2n$:

Երբ հավասարությունների կարգը հավասար է փոփոխականների թվին, ապա նրանք կոչվում են հավասար կարգի հավասարություններ։

Եթե հավասարությունների կարգը ավելի բարձր է, քան փոփոխականների թիվը, ապա նրանք կոչվում են բարձր կարգի հավասարություններ։

Կազմված նոմոգրամների մեջ յուրահատուկ տեղ են գրավում շղթայական նոմոգրամները։

Շղթայական նոմոգրամները կոչվում են այն նոմոգրամները, որոնք ունեն հավասար նոմոգրաֆիկ կարգ և բաղկացած են նոմոգրաֆիկ միատեսակ օղակներից և հետևաբար ունեն միատեսակ երկրաչափական կառուցվածք։

Շղթայական նոմոգրամների օղակներն ունեն երրորդ նոմոգրաֆիկ կարգ, պատկանում են զրոյական, երկրորդ կամ երրորդ ժանրին և կարող են ունենալ առաջին, երկրորդ կամ երրորդ կանոնավոր ձև։

Վերոհիշյալների հիման վրա կարելի է տարբերել շղթայական նոմոգրամների երեք կանոնավոր ձև։

Շղթայական նոմոգրամների առաջին կանոնավոր ձևը ներկայացված է (3) բանաձևով, իսկ երկրորդ կանոնավոր ձևը (4) բանաձևով։ Երրորդ կանոնավոր ձևի հավասարությունը փոփոխականներն առանձնացնելուց հետո վերածվում է (5) բանաձևերի սիստեմայի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Н. А. Глаголев.* Теоретические основы номографии. ОНТИ, М—Л., 1936. 2. *О. В. Ермолова.* Ученые записки МГУ, 1939, 28: 43—54. 3. *М. В. Пентковский.* Номография. ГИТТЛ, М—Л., 1949. 4. *Г. И. Тер-Степанян.* ДАН Арм. ССР, 1950, 12 (1): 3—8. 5. *Г. И. Тер-Степанян.* Цепные номограммы с параллельными шкалами для функции многих переменных (в печати).