ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XIII 1951 2

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян

О равномерных приближениях на замкнутых множествах

(Представлено А. Л. Шагиняном 14 II 1951)

Пусть K — замкнутое множество, дополнение к которому состоит из одной области, содержащей бесконечно удаленную точку, а f(z) — функция, непрерывная на K и аналитическая во всех внутренних точках K.

Вопрос о возможности равномерной аппроксимации f(z) на K полиномами от z рассматривался при различных предположениях относительно множества K.

Для того случая, когда K содержит внутренние точки, наиболее сильный результат получен в 1945 году М. В. Келдышем и формулируется следующим образом ([1]).

Если множество внутренних точек K составляет одну область D, и K совпадает с замыканием этой области, то равномерная аппроксимация функции f(z) полиномами на K возможна.

С другой стороны, если K не содержит внутренних точек, проблема равномерной аппроксимации на K полностью решена в 1934 году М. А. Лаврентьевым ([2]). Согласно его результату, любую функцию, непрерывную на ограниченном континууме, не разбивающем плоскость и не имеющем внутренних точек, можно представить в виде ряда полиномов, равномерно сходящегося к f(z) на K.

В настоящей заметке рассматриваются приближения на континуумах более общего вида, содержащих как нигде не плотные порции, так и внутренние точки.

Теорема 1. Если ограниченный континуум K *не разбивает плоскость и множество внутренних точек* K *составляет конечное число областей, то любую функцию* f(z), *аналитическую во внутренних точках* K *и непрерывную на* K, *можно представить в виде ряда полиномов от* z, *равномерно сходящегося к* f(z) *на множестве* K.

Замечание. Из этой теоремы, как частные случаи, следуют сформулированные выше теоремы М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, причем применяемый нами метод доказательства отличен от тех методов, которые использовались для доказательства этих теорем.

Доказательство теоремы 1. Пусть множество внутренних точек К состоит из n областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$,

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n \quad \text{и} \quad \Gamma = K - D.$$

Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти рациональную функцию $R(z)$ так, чтобы

$$\max_{z \in \Gamma} | f(z) - R(z) | < \varepsilon$$

Доказательство этой леммы аналогично тем рассуждениям, которые применялись в работе (3) для доказательства теоремы М. А. Лаврентьева.

Если α_k — произвольная точка D_k ($K = 1, \ldots, n$), то рациональную функцию $R(z)$ можно выбрать так, чтобы ее полюсы были расположены в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Пусть аналитические кривые C_m ограничивают односвязные области B_m, дополнения которых сходятся при $m \to \infty$ к дополнению К, причем $B_m \in B_{m+1} \in K$.

Пусть также функция $\psi_{km}(z)$ осуществляет конформное отображение области B_m на D_k, при котором

$$\psi_{km}(\alpha_k) = \alpha_k, \quad \psi'_{km}(\alpha_k) > 0.$$

Так как $\{B_m\}$ — последовательность областей, сходящихся к своему ядру — области D_k, то для любого замкнутого множества $F \in D_k$ имеем

$$(1) \ldots \lim_{m \to \infty} \max_{z \in F} | \psi_{km}(z) - z | = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $R(z)$ — рациональная функция с полюсами в $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, удовлетворяющая неравенству

$$\max_{z \in \Gamma} | f(z) - R(z) | < \frac{\varepsilon}{n}$$

Число $\eta > 0$ выберем так, чтобы это неравенство продолжало выполняться и в тех точках К, которые принадлежат η — окрестности Γ. Через r_i обозначим расстояние α_i до Γ, d_i — круг с центром в точке α_i радиуса $\frac{r_i}{4}$.

Функция

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^{n} \{ f[\psi_{km}(z)] - R[\varphi_{km}(z)] \}$$

аналитична в B_m за исключением точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где она имеет полюсы; поэтому для любого $\omega > 0$ можно найти рациональную функцию $T_m(z)$ с полюсами в $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которой неравенство

$$| T_m(z) - S_m(z) | < \omega \ldots \quad (2)$$

выполняется в точках K, расположенных вне $\sum_{i=1}^{n} d_i$. Пусть $M_{k\eta}$ — те точки области D_k, расстояние которых до границы D_k превосходит η. В силу равномерной сходимости $\varphi_{km}(z)$ к z в области D_k, число m можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\varphi_{km}(z) \in D_k - M_{k\eta}$$

для тех z, которые принадлежат $K - D_k$.

Таким образом, если $z \in K - D_k$, то $\varphi_{km}(z)$ принадлежит η — окрестности Γ, т. е.

$$| f[\psi_{km}(z)] - R[\varphi_{km}(z)] | < \frac{\varepsilon}{n} \ldots \quad (3)$$

откуда находим

$$\max_{z \in \Gamma} | S_m(z) | < \varepsilon \ldots \quad (4)$$

Число m можно выбрать, кроме того, настолько большим, чтобы на множестве $\overline{M}_{k\eta}$ выполнялось неравенство

$$| \varphi_{km}(z) - z | < \omega, \ldots \quad (5)$$

где $\omega = \varphi(\varepsilon)$, $\varphi(x)$ — функция, обратная к модулю непрерывности функции $f(z) - R(z)$ в $K - \sum_{i=1}^{n} d_i$

Рассмотрим теперь функцию $S_m(z)$ на окружности $| z - \alpha_k | = \frac{r_k}{4}$.

Имеем в силу выбора ω, а также в силу (3)

$$\max_{|z-\alpha_k| = \frac{r_k}{4}} \left| S_m(z) - \{ f[\varphi_{km}(z)] - R[\varphi_{km}(z)] \} \right| < (n-1) \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon$$

Принимая во внимание (5), находим

$$\max_{|z-\alpha_k| = \frac{r_k}{4}} | f[\varphi_{km}(z)] - R[\varphi_{km}(z)] - f(z) + R(z) | < \varepsilon,$$

откуда следует

$$\max_{|z-\alpha_k| = \frac{r_k}{4}} | S_m(z) - [f(z) - R(z)] | < 2\varepsilon, \quad K = 1, 2, \ldots, n.$$

Сравнивая с (2) и (4), заключаем, в силу принципа максимума, что

$$\max_{z \in K - \sum_{i=1}^{n} d_i} | T_m(z) - f(z) + R(z) | < 3\varepsilon.$$

Обозначим $T_m(z) + R(z) = R_1(z)$, совокупность окружностей

$| (z) - \alpha_k | \frac{r_k}{4}$, $K = 1, 2, \ldots, n$, обозначим через C.

Имеем

$$R_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{R_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{R_1(t)}{t-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{R_1(f)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{R_1(t) - f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Последний член для $z \in \Gamma$ равен нулю, так как $f(z)$ аналитична в D, а

$$\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{R_1(t) - f(t)}{t-z} dt \right| R < 2n\varepsilon.$$

Таким образом, если $z \in \Gamma$, то

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{R_1(t)}{t-z} dt \right| < 2n\varepsilon;$$

так как $\varepsilon > 0$ —произвольно, а $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{R_1(t) - f(t)}{t-z} dt$ — функция, аналитическая на К, то теорема доказана.

Рассмотрим возможность равномерной аппроксимации на К в том случае, когда на множество К никаких ограничений не накладывается.

Как известно, любую непрерывную на К функцию возможно равномерно приблизить на К полиномами от х и у. Через $E_n(f, K)$ обозначим нижнюю грань чисел

$$\max_{z = x + iy \in K} | f(z) - Q_n(x, y) |$$

по всевозможным полиномам $Q_n(x, y)$ от х и у степени $\leqslant n$.

Теорема 2. Если ограниченный континуум К *не разбивает плоскость, а непрерывная на* К *функция* $f(z)$ *аналитична во всех внутренних точках* К *и удовлетворяет дополнительному условию*

$$\lim_{n \to \infty} \inf n^2 E_n(f, K) = 0 \ldots \tag{6}$$

то $f(z)$ *возможно представить в виде ряда полиномов от* z, *равномерно сходящегося к* $f(z)$ *на* K.

Заметим, что теорема 2, повидимому, справедлива и без выполнения условия (6).

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереван, 1951, январь.

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Փակ բազմությունների վրա հավասարաչափ մոտավորությունների մասին

Դիցուկ K-ն հարթությունը չբաժանող սահմանափակ կոնտինուում է, իսկ $f(z)$ *K-ի վրա անընդհատ և K-ի բոլոր ներքին կետերում անալիտիկ ֆունկցիա է։*

Հայտնի է, որ եթե K-ն չի պարունակում ներքին կետեր, ապա $f(z)$ *կարելի է ներկայացնել նրան հավասարաչափ զուգամիտող* z*-ի պոլինոմների շարքի տեսքով։ Մյուս կողմից հայտնի է, որ եթե K-ի ներքին կետերի բազմությունը կազմում է տիրույթ, որի փակույթը* (замыкание) *համընկնում է K-ի հետ, ապա հավասարաչափ մոտավորությունը նույնպես հնարավոր է։*

Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե K-ի ներքին կետերի բազմությունը կազմում է վերջավոր թվով տիրույթներ, ապա կամավոր, K-ի վրա անընդհատ և նրա ներքին կետերում անալիտիկ ֆունկցիան հնարավոր է պոլինոմներով ցանկացած ճշտությամբ հավասարաչափ մոտենալ։

Հետազոտվում է նույնպես կամավոր, հարթությունը չբաժանող K բազմությունների վրա հավասարաչափ մոտենալու հնարավորությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *М. В. Келдыш.* Математический сборник 16 (58), № 3.1945. 2. *М. А. Лаврентьев.* Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1934. 3. *С. Н. Мергелян.* О теореме М. А. Лаврентьева, ДАН СССР (в печати).