ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XII 1950 4

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Б. Бунятян

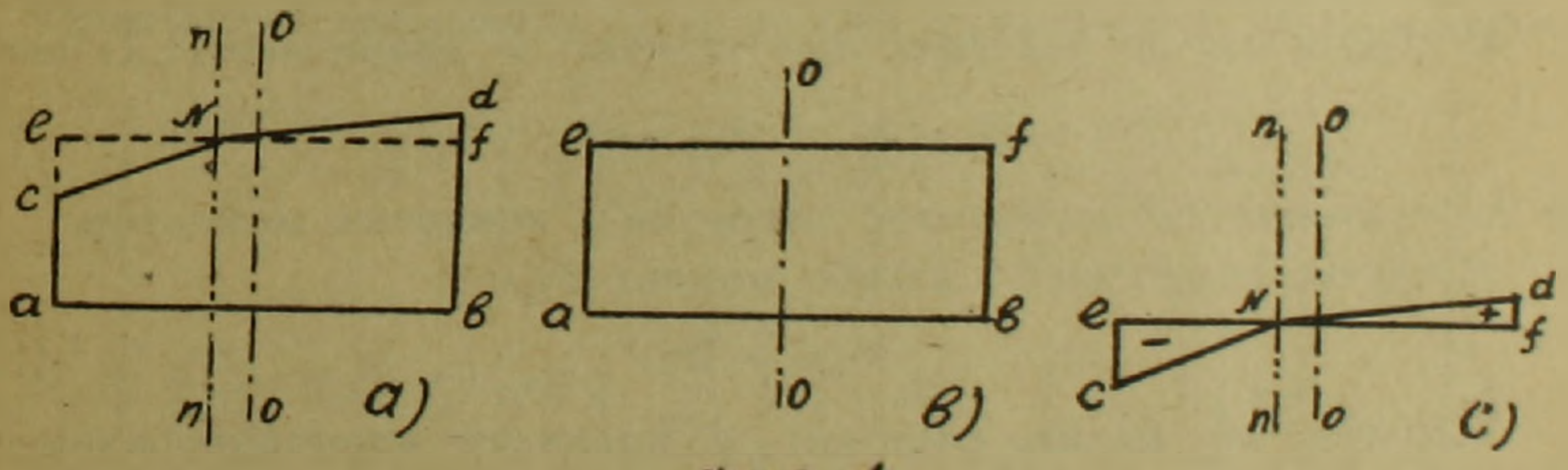
К вопросу устойчивости железобетонного стержня с учетом ползучести бетона

(Представлено А. Г. Назаровым 26 X 1950)

Рассмотрим железобетонный прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, нагруженный какими угодно силами, плоскость которых совпадает с одной из его главных плоскостей. Пусть далее по концам стержня дейсгвуют сжимающие силы P, приложенные с эксцентриситететом, равным c, моменты и поперечная нагрузка.

При составлении уравнений равновесия будем рассматривать общий случай, когда бетон и железо при изгибе стержня работают различно в обеих областях по разные стороны от нейтральной линии. Для бетона это всегда имеет место, так как он работает различно на растяжение и сжатие. Для железа это может иметь место лишь в случае его работы за пределами упругости.

В общем случае действия сил, эпюра напряжений для бетона может иметь вид, изображенный на фигуре 1.



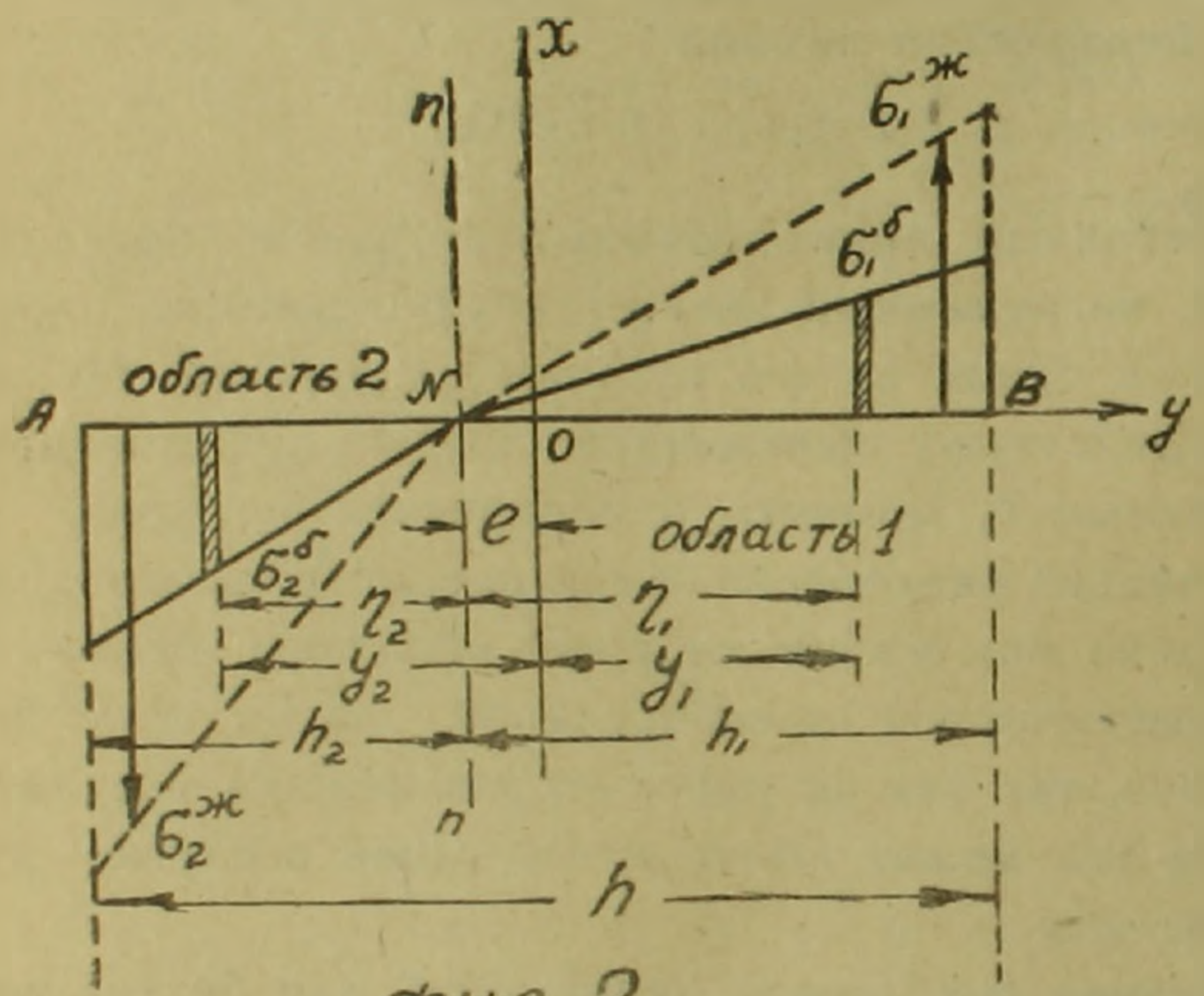
фиг. 1

При исследовании продольного изгиба будем ее рассматривать как результат суммирования двух эпюр (фиг. 1—b и c), из которых первая дает усилия, уравновешивающие сжимающую силу P, а вторая—момент внутренних сил, уравновешивающий изгибающий момент от внешней нагрузки.

Рассматриваемый стержень состоит из двух материалов, и в случае, если нейтральная линия пересекает площадь поперечного сечения, эпюра напряжений может быть изображена, как это показано на фигуре 2.

Располагая начало координат в центре тяжести сечения и направляя ось X-ов вдоль оси стержня, а ось У-ов ей перпендикулярно, мы можем написать уравнение равновесия в виде:

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{F_1} \sigma_1^{б}\, dF - \int\limits_{F_2} \sigma_2^{б}\, dF + \int\limits_{f_1} \sigma_1^{ж}\, df - \int\limits_{f_2} \sigma_2^{ж}\, df = P; \\ \int\limits_{F_1} \sigma_1^{б}\, y\, dF + \int\limits_{F_2} \sigma_2^{б}\, y\, dF + \int\limits_{f_1} \sigma_1^{ж}\, y\, df + \int\limits_{f_2} \sigma_2^{ж}\, y\, df = M, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$



фиг. 2

где $\sigma^{б}$ — напряжение в бетоне,

$\sigma^{ж}$ — напряжение в железе,

f — площадь поперечного сечения железа,

F — площадь бетона.

y — ордината, отсчитываемая от линии действия сжимающей силы, т. е. от центра тяжести сечения;

индексы 1,2 обозначают области по обе стороны от нейтральной линии.

В общем случае действия сил момент в уравнении (1.1) равен:

$$M = M_0 - P(y - c), \qquad (1.2)$$

где M_0 — момент от поперечной нагрузки и концевых моментов.

В случае продольного изгиба момент будет:

$$M = - Py. \qquad (1.3)$$

Полагая, что железо работает в пределах пропорциональности, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^{ж} = E^{ж}\varepsilon_1 = E^{ж}\frac{\eta_1}{\rho}; \\ \sigma_2^{ж} = E^{ж}\varepsilon_2 = E^{ж}\frac{\eta_2}{\rho}, \end{aligned}\right. \qquad (1.4)$$

где η_1 и η_2 — расстояния от нейтральной линии до рассматриваемой точки металла стержня, ρ — радиус кривизны нейтральной плоскости при изгибе.

Для напряжений в бетоне с учетом ползучести материала будем пользоваться уравнениями, предложенными Н. Х. Арутюняном.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^{б}(t) &= \varepsilon_1(t)\, E_1^{б}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_1(\tau)\, R_1(t, \tau)\, d\tau, \\ \sigma_2^{б}(t) &= \varepsilon_2(t) E_2^{б}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_2(\tau) R_2(t, \tau)\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

где $\varepsilon_1(t) = \dfrac{\eta_1}{\rho(t)}$; $\varepsilon_2(t) = \dfrac{\eta_2}{\rho(t)}$, а η — расстояние рассматриваемой точки до нейтральной линии.

Соотношения (1.5) можно рассматривать как интегральные уравнения Вольтера, являющиеся решением диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1(t) + \gamma_1 \dot{\varepsilon}_1(t) &= \left[\frac{\sigma_1(t)}{E_1^{б}(t)}\right]^{\cdot} + f_1(t)\, \frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E_1^{б}(t)}; \\ \ddot{\varepsilon}_2(t) + \gamma_2 \dot{\varepsilon}_2(t) &= \left[\frac{\dot{\sigma}_2}{E_1^{б}(t)}\right] + f_2(t)\, \frac{\dot{\sigma}_2(t)}{E_3^{б}(t)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где $f_1(t) = \gamma_1 \left[1 + \varphi_1(t) E_1^{б}(t)\right]$ и $f_2(t) = \gamma_2 \left[1 + \varphi_2(t)\, E_2^{б}(t)\right]$,

когда мера ползучести бетона выражается функцией вида:

$$c(t, \tau) = \varphi(t) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]. \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.4) и (1.5) в уравнения (1.1), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{F_1} \frac{\eta_1 E_1^{б}(t)}{\rho(t)}\, dF + \int_{F_1}\int_{\tau_1}^{t} \frac{\eta_1}{\rho(t)} R_1(t, \tau)\, d\tau dF - \int_{F_2} \frac{\eta_2 E_2^{б}(t)}{\rho(t)}\, dF - \\ &- \int_{F_2}\int_{\tau_1}^{t} \frac{\eta_2}{\rho(\tau)} R_2(t, \tau)\, d\tau dF + \frac{E_x^{ж}}{\rho(t)} \left[\int_{f_1} \eta_1\, df - \int_{f_2} \eta_2\, df\right] = P, \\ &\int_{F_1} \frac{\eta_1^2 E_1^{б}(t)}{\rho(t)}\, dF + \int_{F_1}\int_{\tau_1}^{t} \frac{\eta_1^2}{\rho(t)} R_1(t, \tau)\, d\tau dF + \int_{F_1} \frac{\eta_2^2 E_2^{б}(t)}{\rho(t)}\, dF + \\ &+ \int_{F_1}\int_{\tau_1}^{t} \frac{\eta_2^2}{\rho(t)} R_2(t, \tau)\, dt dF + \frac{E^{ж}}{\rho(t)} \left[\int_{f_1} \eta_1^2\, df + \int_{f_2} \eta_2^2\, df\right] = M, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где вместо у подставлено — $y = \eta \pm e$.

Уравнение (1.8) может быть переписано в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{S_1^б E_1^б(t)}{\rho(t)}+S_1^б\int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{\rho(t)}R_1(t,\tau)\,d\tau-\frac{S_2^б E_2^б(t)}{\rho(t)}-\\
&-S_2^б\int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{\rho(t)}R_2(t,\tau)\,dF+\frac{E^ж\left(S_1^ж-S_2^ж\right)}{\rho(t)}=P\\
&\frac{I_1^б E_1^б(t)}{\rho(t)}+I_1^б\int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{\rho(t)}R_1(t,\tau)\,d\tau+\frac{I_2^б E_2^б(t)}{\rho(t)}+\\
&+I_2^б\int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{\rho(t)}R_2(t,\tau)\,d\tau+\frac{E^ж\left(I_1^ж+I_2^ж\right)}{\rho(t)}=M.
\end{aligned}\right\}\quad(1.9)$$

Соотношение (1.9) представляют уравнения равновесия железобетонного стержня с учетом ползучести бетона при действии продольных и поперечных сил и моментов.

Рассмотрим теперь железобетонный стержень, имеющий одинаковые физические константы для растяжения и сжатия с сечением, имеющим две оси симметрии при приложении продольной силы в центре тяжести сечения. В этом случае нейтральная ось пройдет через центр тяжести сечения и $E_1^б=E_2^б=E^б$; $R_1(t,\tau)=R_2(t,\tau);=R(t,\tau)$ $I_1^б=I_2^б$; $I_1^ж=I_2^ж$. Учитывая это, уравнение (1.9) мы можем представить в виде:

$$\frac{I^б E^б(t)}{\rho(t)}+I^б\int_{\tau_1}^{t}\frac{1}{\rho(t)}R(t,\tau)\,d\tau+\frac{E^ж I^ж}{\rho(t)}=-Py, \qquad (2.10)$$

где $I^б$ — момент инерции всего бетонного сечения относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения,

$I^ж$ — то же железа,

$E^б(t)$ и $E^ж$ — модули упругости бетона и железа.

Поскольку при малых прогибах

$$\frac{1}{\rho(t)}=\frac{d^2y}{dx^2}=y''(t),$$

уравнение устойчивости (2.10) можно представить в виде:

$$\left[E^б(t)I^б+E^ж I^ж\right]y''(t)+I^б\int_{\tau_1}^{t}y''(\tau)R(t,\tau)\,d\tau+Py(t)=0. \qquad (2.11)$$

Принимая во внимание (1.6), уравнение (2.11), после диференцирования дважды по t и некоторых преобразований, приведем к окончательному диференциальному уравнению вида:

$$\left[E^{6}(t)I^{6}+E^{ж}\, I^{ж}\right]\ddot{y}''(t)+\left\{\gamma E^{6}(t)\,I^{6}+\left[f(t)-\frac{\dot{E}^{6}(t)}{E^{6}(t)}\right]I^{ж}E^{ж}\right\}\dot{y}''(t)+$$

$$+P\,\ddot{y}(t)+P\left[f(t)-\frac{\dot{E}^{6}(t)}{E^{6}(t)}\right]\dot{y}(t)=0, \tag{2.12}$$

где $f(t)=\gamma\left[1+E^{6}(t)\,\varphi(t)\right]$.

Решение уравнения (2.12) для стержня с шарнирным закреплением концов ищем в виде:

$$y(t)=A(t)\,\mathrm{Sin}\,\frac{k\pi x}{l}\,. \tag{3.13}$$

После подстановки (3.13) в (2.12) последнее после ряда преобразований переходит в диференциальное уравнение по $A(t)$ вида:

$$\left\{P-\left[E^{6}(t)I^{6}+E^{ж}\,I^{ж}\right]\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}\right\}\ddot{A}(t)+\left\{P\left[f(t)-\frac{\dot{E}(t)}{E(t)}\right]-\right.$$

$$\left.-\gamma E^{6}(t)\,I^{6}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}-\left[f(t)-\frac{\dot{E}^{6}(t)}{E^{6}(t)}\right]\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}E^{ж}\,I^{ж}\right\}\dot{A}(t)=0. \tag{3.14}$$

Последнее уравнение с отделимыми переменными и его интеграл будет:

$$A(t)=C\int\limits_{\tau_1}^{t}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\left[f(t)-\frac{\dot{E}^{6}(t)}{E^{6}(t)}\right][N(t)-P]}{P_1(t)-P}dt}\,dt, \tag{3.15}$$

где $N(t)$ и $P_1(t)$ обозначают

$$N(t)=\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}E^{6}(t)I^{6}}{1+\varphi(t)\,E^{6}(t)-\frac{\dot{E}^{6}(t)}{\gamma E^{6}(t)}}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}E^{ж}\,I^{ж},$$

$$P_1(t)=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}E^{6}(t)I^{6}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{2}E^{ж}\,I^{ж}. \tag{3.16}$$

Принимаем следующий критерий устойчивости: *какова бы ни была продолжительность воздействия нагрузки, бесконечно малая* *деформация, приданная в момент загружения стержня, должна оставаться ограниченной, т. е. не возрастать во времени.* Исходя из этого должно иметь место неравенство

$$N(t) - P > 0, \tag{3.17}$$

так как всегда $\dot{I}(t) - \frac{\dot{E}^{б}(t)}{E(t)} > 0$ и $P_1(t) > N(t)$.

В этом случае показатель степени подинтегрального выражения будет отрицательным и интеграл будет ограниченным.

В том случае, когда неравенство (3.17) превращается в равенство, т. е. имеет место

$$N(t) - P = 0 \text{ или } P = N(t), \tag{3.18}$$

прогиб $y(t)$ или пропорциональная ему величина $A(t)$ будет равна

$$A(t) = C(t - \tau_1), \tag{3.19}$$

которая будет возрастать с продолжительностью воздействия нагрузки. Величину продольной силы, при которой имеет место равенство (3.18), будем называть критической силой длительной устойчивости. Таким образом, минимальная критическая сила длительной устойчивости равна:

$$P^{д}_{кр} = N(t) = \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E^{б}(t)\, I^{б}}{1 + \varphi(t)E^{б}(t) - \frac{\dot{E}^{б}(t)}{\gamma E^{б}(t)}} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E^{ж} I^{ж}. \tag{3.20}$$

Из выражения (3.20) следует, *что возраст бетона существенно влияет на значение критической силы длительной устойчивости.*

При равенстве нулю знаменателя показателя степени подинтегрального выражения (3.15), т. е.

$$P_1(t) - P = 0 \text{ или } P = P_1(t), \tag{3.21}$$

$A(t)$ мгновенно станет бесконечно большим. Значение этой силы называется критической силой мгновенной устойчивости и определяется по формуле

$$P^{м}_{кр} = P_1(t) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E^{б}(t)\, I^{б} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E^{ж} I^{ж}. \tag{3.22}$$

В случае бетонного стержня $\left(f^{ж} = 0\right)$ критическая сила длительной устойчивости при больших значениях t, для одного частного состава бетона на портландцементе, в 2,8 раза меньше мгновенной.

Институт стройматериалов и сооружений
Академии наук Армянской ССР

Լ. Բ. ԲՈՒՆԻԱԹՅԱՆ

Երկաթբետոնյա ձողի կայունությունը բետոնի հասունության ակնառումով

Աշխատանքը բաղկացած է երեք մասից։ Առաջին մասում արտածված են երկաթբետոնյա ձողի հավասարակշռության հավասարումները բետոնի հասունության ակնառմամբ այն դեպքի համար, երբ ազդող կամայական ուժերի հարթությունը համընկնում է ձողի գլխավոր հատույթներից մեկի հետ։ Բետոնի հասունության ակնառմամբ նրա մեջ առաջացած լարումների համար օգտագործել ենք Ն. Խ. Հարությունյանի (2) հավասարումները։ Այսպիսով ստացվում են հավասարակշռության ընդհանուր հավասարումները, որոնք բնութագրում են այն դեպքը, երբ բետոնի և երկաթի ֆիզիկական հատկությունները ձգման և սեղմման ժամանակ տարբեր են։

Երկրորդ մասում բերվում է երկաթբետոնյա ձողի կայունության հավասարումը այն մասնավոր դեպքի համար, երբ սիմետրիայի երկու առանցք ունեցող ձողի ձգման և սեղմման ֆիզիկական հաստատունները միևնույնն են և լայնական ուժերը կիրառված են ծայր հատույթների ծանրության կենտրոններում։ Կայունության՝ ինտեգրալ ձևով գրած (2.10) հավասարումը ըստ t-ի կրկնակի դիֆերենցումից հետո բերված է (2.11) դիֆերենցիալ հավասարմանը։

Երրորդ մասում ինտեգրվում է կայունության (2.11) հավասարումը, այն դեպքի համար, երբ ձողի ծայրերն ամրացված են շարնիրային կայունության չափանիշից, այն է՝ ինչպիսին էլ որ լինի բեռնավորման ազդեցության տևողությունը, ձողին բեռնավորման պահին հաղորդած դեֆորմացիան պետք է մնա սահմանափակ, այսինքն չպետք է աճի ժամանակի ընթացքում, որոշվում է տևական կայունության կրիտիկական ուժը։ Ստացված արդյունքից բխում է, որ բետոնի հասակը էապես ազդում է տևական կայունության կրիտիկական ուժի արժեքի վրա։

Վերջում բերված է ակնթարթային կայունության կրիտիկական ուժի արժեքը, այսինքն բեռնավորման այն արժեքը, որն ակնթարթորեն հանում է ձողը հավասարակշռի վիճակից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *В. П. Манжаловский*. Некоторые задачи по теории устойчивости. ОНТИ.— НКТП, Гос. научн.-техн. изд. Украины, 1938. 2. *Н. Х. Арутюнян*. Прикладная матем. и механика, XIII, вып. 6, 1949 г.