ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XII 1950 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

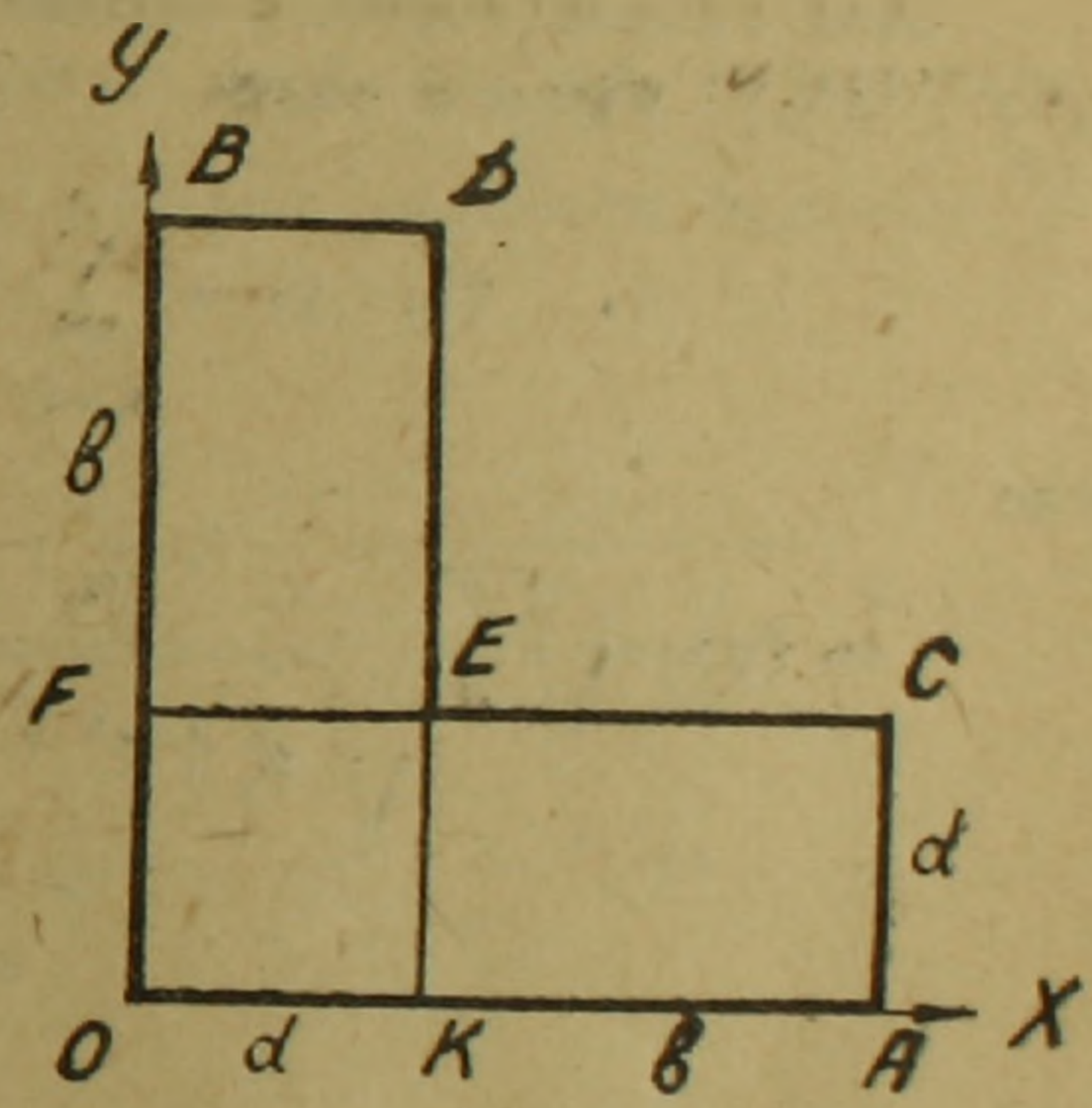
Об одной задаче теплопроводности

(Представлено А. Г. Назаровым 2 VIII 1950)

В настоящей работе решается задача о плоском стационарном распространении тепла в равнобоком угле при наличии теплообмена на его сторонах.*

Пусть на сторонах OA, OB, EC и ED происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, а стороны AC и BD поддерживаются при произвольно заданной температуре $P(y)$ и $P(x)$. Тогда температура $U(x,y)$ в угле определяется, как известно([1]), из уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$



Фиг. 1

и граничных условий

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}+hU\right|_{x=d}=0,\ (y\geqslant d), \qquad \left.-\frac{\partial U}{\partial x}+hU\right|_{x=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}+hU\right|_{y=d}=0,\ (x\geqslant d), \qquad \left.-\frac{\partial U}{\partial y}+hU\right|_{y=0}=0, \tag{2}$$

$$U(b,y)=P(y), \qquad U(x,b)=P(x).$$

здесь

$$h=\frac{H}{K},$$

H—коэфициент теплопередачи, K—коэфициент теплопроводности.

Для нахождения $U(x,y)$ разбиваем угол линиями EF и EK на три части. Функцию $U(x,y)$ представляем в виде

---

* Впервые эффективное решение для кручения стержней полигонального очертания было дано Н. Х. Арутюняном ([2]).

$$U^i(x,y)=\begin{cases} U_1(x,y) & \text{при} \quad x\geqslant d \\ U_2(x,y) & \text{„} \quad x\leqslant d,\ y\leqslant d \\ U_3(x,y) & \text{„} \quad y\geqslant d, \end{cases} \tag{3}$$

причем $U_i(x,y)$ — гармонические и должны удовлетворять следующим условиям непрерывности:

$$U_1(d,y)=U_2(d,y),\ \left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial x}\right|_{x=d}=\left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}\right|_{x=d},\ U_3(x,y)=U_1(y,x),$$
$$U_2(x,d)=U_1(d,x),\ \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=d}=\left.\frac{\partial U_1(y,x)}{\partial y}\right|_{y=d} \tag{4}$$

и соответствующим граничным условиям (2).

Легко видеть, что определенная таким образом функция $U(x,y)$ будет непрерывна вместе со своими производными вплоть до второго порядка во всей области OACEDB, включая линии раздела EK и EF.

Для удовлетворения первой группе граничных условий (2) функцию $U_1(x,y)$ ищем в виде

$$U_1(x,y)=\sum_{к=0}^{\infty} U_к(x)\varphi_к(y), \tag{5}$$

где

$$\varphi_к(y)=\sqrt{\frac{2}{d}}\,\frac{\alpha_к}{\sqrt{\alpha_к^2+\rho^2+\frac{2\rho}{\pi}}}\left(\cos\frac{\alpha_к \pi y}{d}+\frac{\rho}{\alpha_к}\sin\frac{\alpha_к \pi y}{d}\right),$$

$$\rho=\frac{hd}{\pi},$$

$\alpha_к$ — положительные корни уравнения

$$tg\,\alpha_к\pi=\frac{2\alpha_к\rho}{\alpha_к^2-\rho^2}, \qquad к=0,1,2... \tag{6}$$

Остановимся на некоторых свойствах функций $\varphi_к(y)$, используемых в дальнейшем.

Функции $\varphi_к(y)$, ортогональные и нормированные в интервале $(0,d)$, ([1]) удовлетворяют уравнению

$$\varphi''_к(y)+\left(\frac{\alpha_к\pi}{d}\right)^2\varphi_к(y)=0$$

и условиям

$$\varphi'_к(d)+h\varphi_к(d)=0, \qquad \varphi'_к(0)-h\varphi_к(0)=0. \tag{7}$$

Кроме того, $\varphi^2_к(d)=\varphi^2_к(0)=\dfrac{2\alpha^2_к}{d\left(\alpha^2_к+\rho^2+\frac{2\rho}{\pi}\right)}$.

Система функций $\{\varphi_k(y)\}$ полна. В самом деле, в каждом промежутке $(k, k+1)$ лежит один корень α_k уравнения (6). Разложив (6) на два уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2k}\pi}{2}=\frac{\rho}{\alpha_{2k}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_{2k+1}\pi}{2}=-\frac{\alpha_{2k+1}}{\rho} \tag{8}$$

$$k=0,1,2,\ldots$$

покажем, что положительные корни первого из уравнений (8) заключены в границах $k<\frac{\alpha_{2k}}{2}<k+\frac{\rho}{k\pi}$, начиная с $k=1$. Обозначим $\frac{\alpha_{2k}}{2}=k+\beta_{2k}$. Легко видеть, что

$$0<\beta_{2k}<\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$\lambda(x)=\operatorname{tg}\pi x-\frac{\rho}{x},$$

монотонно возрастающую и непрерывную на всей оси OX, за исключением точек $x=k+\frac{1}{2}$ и $x=0$, нулями которой являются искомые $\frac{\alpha_{2k}}{2}$.

При этом

$$\lambda(k)=-\frac{\rho}{k}<0, \quad \lambda\left(k+\frac{\rho}{k\pi}\right)=\operatorname{tg}\frac{\rho}{k}-\frac{\rho}{k+\frac{\rho}{k\pi}}.$$

Для $\frac{\rho}{k\pi}<\frac{1}{2}$

$$\lambda\left(k+\frac{\rho}{k\pi}\right)>\frac{\rho}{k}-\frac{\rho}{k+\frac{\rho}{k\pi}}>0$$

и следовательно нули $\lambda(x)$ расположены в промежутке

$$k<\frac{\alpha_{2k}}{2}<k+\frac{\rho}{k\pi}. \tag{10}$$

При $\frac{\rho}{k\pi}\geqslant\frac{1}{2}$ неравенство (10) сохраняется автоматически в силу (9). Точно также можно показать, что корни второго уравнения 6) расположены в промежутке

$k+\frac{1}{2}<\frac{\alpha_{2k+1}}{2}<k+\frac{1}{2}+\frac{\rho}{k\pi}$. Таким образом имеем, что

$$k<\alpha_k<k+\frac{2\rho}{k\pi}. \tag{11}$$

Неравенства (11) можно использовать также при вычислении корней α_k.

С другой стороны, обозначая

$$r_k = \sqrt{\int_0^d \left[\varphi_k(x) - \sqrt{\frac{2}{d}} \cos \frac{k\pi x}{d}\right] dx},$$

будем иметь

$$r_k^2 = \frac{2}{d}\int_0^d \left\{ \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \rho^2 + \frac{2\rho}{\pi}}} \left[\cos \frac{\alpha_k \pi x}{d} + \frac{\rho}{\alpha_k} \sin \frac{\alpha_k \pi x}{d} - \cos \frac{k\pi x}{d} \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \rho^2 + \frac{2\rho}{\pi}}} - 1 \right) \cos \frac{k\pi x}{d} \right\}^2 dx \leqslant \frac{6\alpha_k^2}{d\left(\alpha_k^2 + \rho^2 + \frac{2\rho}{\pi}\right)} \int_0^d \left[\left(\cos \frac{\alpha_k \pi x}{d} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos \frac{k\pi x}{d} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\alpha_k^2} \sin^2 \frac{\alpha_k \pi x}{d} \right] dx + \frac{6}{d}\left[\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \rho^2 + \frac{2\rho}{\pi}}} - 1 \right]^2 \int_0^{2d} \cos^2 \frac{k\pi x}{d} dx.$$

Но согласно (11) имеем

$$\int_0^d \left(\cos \frac{\alpha_k \pi x}{d} - \cos \frac{k\pi x}{d} \right)^2 dx = 4 \int_0^d \sin^2 \frac{(\alpha_k + k)\pi x}{2d} \sin^2 \frac{(\alpha_k - k)\pi x}{2d} dx < \frac{4\rho^2 d}{3k^2},$$

откуда

$$r_k^2 < \frac{4\rho}{k^2}(8\rho + 1), \qquad r_0^2 < 16 + \frac{4\rho^2\pi^2}{3},$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

а следовательно ряд $\sum_{k=0}^{\infty} r_k^2$ сходится. Согласно свойству устойчивости полноты квадратически близких ортогональных нормированных систем[3], из полноты системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{d}} \cos \frac{k\pi x}{d}\right\}$ и следует полнота системы $\{\varphi_k(y)\}$.

Перейдем к определению функций $U_i(x,y)$.

Для членов $U_k(x)$ разложения (5) имеем

$$U_k(x) = F_k e^{\frac{\alpha_k \pi x}{d}} + H_k e^{-\frac{\alpha_k \pi x}{d}}.$$

Функцию $U_2(x,y)$ ищем в виде

$$U_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \varphi_k(y).$$

Принимая во внимание граничные условия (2) и (4), а также (7), для выражения Vк (x) получим, используя идею Г. А. Гринберга[4],

$$V_\kappa(x)=M_\kappa e^{\frac{\alpha_\kappa \pi x}{d}}+N_\kappa e^{-\frac{\alpha_\kappa \pi x}{d}}+\frac{d^2\varphi_\kappa(d)}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{U_p'(d)+hU_p(d)}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2}\varphi_p(d).$$

Разлагая функцию P(y) в ряд по $\varphi_\kappa(y)$ (12)

$$P(y)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}q_\kappa\varphi_\kappa(y)\,,\qquad q_\kappa=\int_0^d P(y)\varphi_\kappa(y)dy$$

и удовлетворяя условиям (2) и (4), для коэфициентов $F_\kappa, H_\kappa, M_\kappa, N_\kappa$ получим следующие выражения

$$F_\kappa=-H_\kappa e^{-2\alpha_\kappa\pi\beta}+q_\kappa e^{-\alpha_\kappa\pi\beta}$$

$$M_\kappa=-(\alpha_\kappa+\rho)e^{-\alpha_\kappa\pi\beta}\left\{\frac{H_\kappa[\alpha_\kappa \operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi(\beta-1)-\rho\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi(\beta-1)]}{(\alpha_\kappa^2+\rho^2)\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi+2\alpha_\kappa\rho\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\alpha_\kappa+\rho}{2}q_\kappa e^{-\alpha_\kappa\pi}}{(\alpha_\kappa^2+\rho^2)\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi+2\alpha_\kappa\rho\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi,}\right\}$$

(13)

$$N_\kappa=-(\alpha_\kappa-\rho)e^{-\alpha_\kappa\pi\beta}\left\{\frac{H_\kappa[\alpha_\kappa\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi(\beta-1)-\rho\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi(\beta-1)]}{(\alpha_\kappa^2+\rho^2)\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi+2\alpha_\kappa\rho\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\alpha_\kappa+\rho}{2}q_\kappa e^{-\alpha_\kappa\pi}}{(\alpha_\kappa^2+\rho^2)\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi+2\alpha_\kappa\rho\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi}\right\}.$$

где $\beta=\frac{b}{d}$,

причем H_κ определяются из бесконечной системы линейных уравнений

$$H_\kappa=-\frac{d}{\pi}e^{-\alpha_\kappa\pi\beta}\varphi_\kappa(d)\frac{(\alpha_\kappa^2+\rho^2)\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi+2\alpha_\kappa\rho\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi}{\alpha_\kappa(\alpha_\kappa\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi\beta+\rho\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi\beta)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\varphi_p(d)e^{-\alpha_p\pi\beta}}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2}\times$$

(14)

$$\times\left\{H_\kappa[\alpha_p\operatorname{ch}\alpha_p\pi(\beta-1)-\rho\operatorname{sh}\alpha_p\pi(\beta-1)]-\frac{\alpha_p+\beta}{2}q_p e^{-\alpha_p\pi}\right\}+$$

$$+\frac{q_\kappa(\alpha_\kappa-\rho)}{2(\alpha_\kappa\operatorname{ch}\alpha_\kappa\pi\beta+\rho\operatorname{sh}\alpha_\kappa\pi\beta)}.$$

Для решения этой системы, обозначив

$$H_k e^{-\alpha_k \pi\beta} \varphi_k(d)[\alpha_k \operatorname{ch}\alpha_k \pi(\beta-1) - \rho \operatorname{sh}\alpha_k \pi(\beta-1)] = C_k, \qquad (15)$$

после некоторых преобразований придем к следующей системе

$$C_k = \frac{-2\alpha^2_k}{\pi\alpha_k(\alpha_k \operatorname{ch}\alpha_k\pi\beta + \rho\operatorname{sh}\alpha_k\pi\beta)\left(\alpha^2_k + \rho^2 + \dfrac{2\rho}{\pi}\right)} \times$$

$$\frac{}{[\alpha_k \operatorname{ch}\alpha_k \pi(\beta-1) - \rho\operatorname{sh}\alpha_k \pi(\beta-1)]\,[(\alpha^2_k + \rho^2)\operatorname{sh}\alpha_k\pi + 2\alpha_k \rho \operatorname{ch}\alpha_k \pi]} + 1$$

$$\times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty}{}' \frac{C_p}{\alpha^2 p + \alpha^2 p} - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(d)\frac{\alpha_p + \rho}{\alpha^2 p + \alpha^2_k} e^{-\alpha_p \pi\beta} q_p - \right. \qquad (16)$$

$$\left. - \frac{\pi\alpha_k(\alpha_k - \rho) e^{-\alpha_k\pi\beta} q_k}{2\varphi_k(d)[(\alpha^2_k + \rho^2)\operatorname{sh}\alpha_k\pi + 2\alpha_k\rho\operatorname{ch}\alpha_k\pi]} \right\},$$

где штрих при знаке суммы означает, что при суммировании опускается индекс $p=k$.

Используя неравенство (11) и производя оценки, получаем, что сумма модулей коэфициентов уравнений (16) не превосходит величины

$$\left| 1 - \frac{(\alpha^2_k + \rho^2)\left[1 - e^{-2\alpha_k\pi(\beta-1)}\right] + 2\rho\left[\rho - \alpha_k e^{-2\alpha_k\pi(\beta-1)}\right] + \dfrac{4\rho}{\pi}}{2\left(\alpha^2_k + \rho^2 + \dfrac{2\rho}{\pi}\right)} \right| \qquad (17)$$

для $k \geqslant 1$, а для $k=0$—меньше

$$\left| 1 - \frac{(\alpha^2_0 + \rho^2)\left[1 - e^{-2\alpha_0\pi(\beta-1)}\right] + 2\rho\left[\rho - \alpha_0 e^{-2\alpha_0\pi(\beta-1)}\right] + \dfrac{4\rho}{\pi}}{2\left(\alpha_0^2 + \rho^2 + \dfrac{2\rho}{\pi}\right)} \right| \times$$

$$\times\left(\operatorname{cth}\alpha_0\pi - \frac{1}{\alpha_0\pi}\right) \qquad (18)$$

и для всех значений $\beta = \dfrac{b}{d}$, начиная с $\beta \geqslant 1{,}1$ при любых ρ и k сумма модулей коэфициентов остается меньшей 0,8, т. е. система (16) вполне регулярна.

С другой стороны, свободные члены b_k, будучи ограниченными, стремятся к нулю с увеличением индекса k. Задаваясь геометрическими и термическими характеристиками $\beta = \dfrac{b}{d}$, $\rho = \dfrac{hd}{\pi}$, а также распределением температуры $P(y)$, $P(x)$ на сторонах AC и BD, и найдя соответствующие корни α_k уравнения (6), на основании теорем о вполне регулярных системах([5]) легко оценим сверху и снизу значения неизвестных C_k, посредством которых определятся значения коэфициентов H_k, F_k, M_k и N_k.

Сектор Математики и Механики
АН Арм. ССР
Ереван, 1950, июль

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջերմհաղորդականության մի խնդրի մասին

Ներկա հոդվածում լուծվում է ջերմության հարթ ստացիոնար բաշխման խնդիրը անկյան մեջ՝ կողմերի վրա ջերմափոխանակության առկայության դեպքում։ Խնդիրը լուծվում է առանձին ուղղանկյունների «կարման» եղանակով, որի օգնությամբ հաջողվում է խնդրի մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերել երկրորդ կարգի սովորական գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը, ընդորում ինտեգրման հաստատունները որոշվում են գծային հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմի լուծումից։ Ցույց է տրված խնդրում օգտագործվելիք $\{\varphi_k(y)\}$ *ֆունկցիաների սիստեմի լրիվությունը և նշվում են (6) հավասարման արմատների աճման սահմանները։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Х. С. Карслоу.* Теория теплопроводности, 1947. 2. *Н. Х. Арутюнян.* ПММ, **13**, № 1, 1949. 3. *Nina Bary.* Матем. Сб. **14** (56), № 1—2, 1944. 4. *Г. А. Гринберг.* ИАН СССР, серия физич. **10**, № 2, 1946. 5. *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа, 1949.