ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XII 1950 2

МАТЕМАТИКА

В. А. Тонян

Об аппроксимации непрерывных функций на множествах, разбивающих плоскость

(Представлено А. Л. Шагиняном 9 VI 1950)

Назовем множество $M\alpha$ — множеством, если любую непрерывную на нем функцию возможно представить равномерно сходящимся рядом рациональных функций.

В настоящей заметке мы приводим доказательство следующей теоремы:

Для того чтобы множество M было α — множеством, достаточно и, вообще говоря, необходимо, чтобы его плоская мера равнялась нулю.

Доказательство достаточности условий теоремы основано на следующей лемме, аналогичной лемме М. А. Лаврентьева ([1]), для случая множества, разбивающего плоскость, вследствие чего полиномы естественно заменяются рациональными функциями.

Лемма. Пусть M — замкнутое ограниченное множество, такое, что его пересечение с прямой

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$$

имеет меру нуль. При этих условиях, каковы бы ни были положительные числа a и ε, существует рациональная функция $R(z)$, обладающая следующими свойствами:

1° $|R(z)| < 1$ при $z \in M$,

2° $|R(z) - 1| < \varepsilon$ при $z \in M$ и $x\cos\beta + y\sin\beta - p \geqslant a$,

3° $|R(z)| < \varepsilon$ при $z \in M$ и $x\cos\beta + y\sin\beta - p \leqslant a$.

Приведем в общих чертах доказательство достаточности для случая ограниченного множества, т. к. общий случай легко приводится к этому преобразованием $\frac{1}{z-a}$, не нарушающим рациональности аппроксимирующей функции. Здесь a — центр круга, не содержащего точек множества M (такой круг всегда имеется, т. к. мера множества M равна нулю).

Легко видеть, что из справедливости теоремы для функции x (а следовательно и для функции y) будет следовать ее справедливость для любой непрерывной функции.

Итак, покажем, что как бы мало ни было число ε, всегда возможно построить рациональную функцию $R(z)$, такую, что для всех точек множества M

$$| R(z) - x | < \varepsilon.$$

Не нарушая общности результата, будем предполагать, что множество M принадлежит квадрату $K: A(0,0)$; $B(0,1)$; $C(1,1)$; $D(1,0)$. При фиксированном ε выберем n таким, чтобы $(n-1)\varepsilon < 1$, но $n\varepsilon \geqslant 1$.

Разобьем квадрат K прямыми $x = x_i$ $(i = 1,2, \ldots n)$ на n прямоугольников, причем выберем x_i таким, чтобы пересечение прямой $x = x_i$ с множеством M имело нулевую меру (последнего всегда возможно добиться, т. к. плоская мера M равна нулю).

Теперь на основании приведенной леммы построим рациональную функцию $R_i(z)$, обладающую следующими свойствами:

$$1^0 \ | R_i(z) | < 1 \qquad \text{при } z \in M,$$
$$2^0 \ | R_i(z) - 1 | < \varepsilon \qquad \text{при } z \in M \text{ и } x \geqslant i\varepsilon,$$
$$3^0 \ | R_i(z) | < \varepsilon \qquad \text{при } z \in M \text{ и } x \leqslant (i-1)\varepsilon$$

и докажем, что рациональная функция

$$R(z) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} R_i(z)$$

есть искомая.

Действительно, имеем для $z \in M$ и $\varepsilon(k-1) < x < k\varepsilon$, $(k < n)$

$$| R(z) - x | \leqslant | R(z) - (k-1)\varepsilon | + 0(\varepsilon) \leqslant \left| \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ R_i(z) - 1 \right\} \right| +$$

$$+ \varepsilon | R_k(z) | + \varepsilon \left| \sum_{i=k+1}^{n} R_i(z) \right|.$$

Теперь легко видеть, что согласно свойству 2^0, каждая из разностей $| R_i(z) - 1 |$ $(i = 1,2 \ldots k-1)$ меньше ε для точек, лежащих соответственно правее x_i $(i = 1,2, \ldots k-1)$, а рассматриваемая точка лежит правее всех их; следовательно

$$\varepsilon \left| \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ R_i(z) - 1 \right\} \right| < \varepsilon^2(k-1) \text{ при } z \in M.$$

Из 1^0 следует, что

$$\varepsilon | R_k(z) | < \varepsilon \text{ при } z \in M.$$

Наконец из 3^0 имеем

$$\varepsilon\left|\sum_{i=k+1}^{n} R_i(z)\right| < \varepsilon^2(n-k) \text{ при } z \in M.$$

Учитывая эти оценки, получим, помня, что, в силу выбора $(n-1)\varepsilon < 1$:

$$|R(z) - x| < \varepsilon \cdot \varepsilon(n-1) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

и, т. к. ε произвольно, то первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы приведем пример замкнутого нигде не плотного множества, не являющегося α — множеством.

Пусть M — замкнутое нигде не плотное множество, получающееся удалением из единичного круга счетного множества открытых кругов, расположенных всюду плотно по площади круга, причем окружности Γ_ν удаленных кружков k_ν не касаются ни друг друга, ни основной окружности. Выберем радиусы ε_ν этих кругов так, чтобы выполнилось условие: $\Sigma\, \varepsilon_\nu < \varepsilon$, где ε — наперед фиксированное положительное число.

Теперь докажем, что на множестве M, построенном таким образом, не всякую непрерывную функцию возможно равномерно аппроксимировать рациональными функциями, т. е. что оно не есть α — множество.

Действительно, если бы для любой непрерывной на M функции $f(z)$ существовала такая рациональная функция $R(z)$, что

$$|R(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ при } z \in M,$$

т. е. что $R(z) = f(z) + \varepsilon(z)$, где $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$ при $z \in M$, (*)
то, обозначив через k_{ν_i} $(i = 1, 2, \ldots p)$ кружки, содержащие полюсы $R(z)$, лежащие в $|z| < 1$, мы получили бы на основании теоремы Коши

$$\int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{p} \Gamma_{\nu_i}} R(z)\,dz = \int\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu} R(z)\,dz = \int\limits_{|z|=1} R(z)\,dz$$

или, учитывая (*),

$$\int\limits_{|z|=1} \{f(z) + \varepsilon(z)\}\,dz = \int\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu} \{f(z) + \varepsilon(z)\}\,dz,$$

или же, вспоминая выбор радиусов кружков k_ν, имели бы окончательно.

$$\left|\int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz\right| = O(\varepsilon).$$

Но, т. к. ε произвольно, а $f(z)$ не зависит от него, то

$$\left| \int\limits_{|z|=1} f(z)\, dz \right| = 0.$$

Теперь достаточно взять такую непрерывную функцию (например $|z|$), которая не удовлетворяет этому последнему условию и ее будет невозможно равномерно аппроксимировать рациональными функциями на построенном множестве M. Этим завершается доказательство теоремы.

Отметим, что было бы интересно исследовать необходимые и достаточные характеристики α — множеств.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1950, июнь.

Վ. Ա. ՏՈՆՅԱՆ

Հարթությունը մասերի բաժանող բազմությունների վրա անընդհատ ֆունկցիաների մոտարկումը

Ներկա հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Որպեսզի փակ բազմության վրա տված անընդհատ ֆունկցիան հնարավոր լինի մոտարկել ռացիոնալ ֆունկցիաներով, բավարար է և ընդհանրապես անհրաժեշտ, որ բազմության մակերեսային չափը լինի զերո։

Թեորեմի առաջին մասի ապացույցը հիմնված է Մ. Ա. Լավրենտևի(1) լեմմին համույն մի լեմմի վրա, բայց այն դեպքի համար, երբ բազմությունը հարթությունը բաժանում է մասերի, որի հետևանքով և բաղմանդամները փոխարինված են ռացիոնալ ֆունկցիաներով։

Թեորեմի երկրորդ մասի ապացույցի համար ցույց է տրված, որ միավոր շրջանից ամենուրեք խիտ դասավորված բաց շրջանների արտարկումից առաջացած փակ (դրական մակերեսային չափ ունեցող) բազմության վրա $|z|$ ֆունկցիան անհնար է մոտարկել ռացիոնալ ֆունկցիաներով։

Վերջում առաջադրվում է գտնել այն բավարար և անհրաժեշտ պայմանները, որոնց պետք է ենթարկել որևէ բազմություն՝ նրա վրա տված կամայական անընդհատ ֆունկցիան ռացիոնալ ֆունկցիաներով մոտարկելու հնարավորության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *М. А. Лаврентьев.* Труды физ. мат. Института им. В. А. Стеклова, отд. мат., 5, 1934.