ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XII 1950 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. И. Тер-Степанян

Об одном общем свойстве номограмм с параллельными шкалами для функции многих переменных

(Представлено А. Г. Назаровым 19 V 1950)

Для графического решения уравнения со многими переменными вида

$$F_1(\alpha) \pm F_2(\beta) \pm F_3(\gamma) \pm \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \pm F_m(\mu) = F_n(\nu) \tag{1}$$

или приводимого к нему вида ([2]), где

$F_1(\alpha),\ F_2(\beta),\ F_3(\gamma), \ldots \ldots F_m(\mu)$ — суть некоторые монотонные, по крайней мере, в изучаемой области, функции, а α, β, γ, ... μ — некоторые независимые переменные, применяются номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами. Методом графического исключения переменных уравнение (1) приводится к системе уравнений второй канонической формы, вида

$$\left.\begin{array}{r} F_1(\alpha) \pm F_2(\beta) = \rho \\ \rho \pm F_3(\gamma) = \sigma \\ \sigma \pm F_4(\delta) = \tau \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \varphi \pm F_m(\mu) = F_n(\nu) \end{array}\right\} \tag{2}$$

где ρ, σ, τ . . . . φ суть вспомогательные функции.

Существующие методы ([1]) графического решения уравнения (1) заключаются в построении цепи номограмм для каждого из уравнений системы (2), причем немые шкалы вспомогательных функций ρ, σ, τ . . . φ являются общими; для определения уравнения шкалы функции зависимой переменной $F_n(\nu)$ должны быть последовательно определены параметры уравнений всех вспомогательных функций, что при большом числе переменных может представить известные трудности. Контроль правильности построения номограммы заключается в производстве ряда пробных сравнительных расчетов аналитическим и графическим методами, причем в случае, если будет обнаружено недопустимое расхождение между результатами, ошибка может быть установлена только после повторения всего построения.

Можно показать, что между параметрами уравнений шкал всех функций системы (2), равно как и между длинами и взаимным расположением шкал номограммы, служащей для решения этой системы, существуют простые зависимости, позволяющие легко получать все необходимые для построения номограммы данные. Тогда расчет номограммы сведется к вычислению несложной таблицы—алгорифма. Контроль правильности расчета может быть произведен на основании анализа этой таблицы, а возможные ошибки вычислений могут быть сразу же устранены, еще до построения номограммы.

В настоящей работе применена терминология, уточненная или введенная М. В. Пентковским ([3]); помимо этого автор был вынужден ввести следующие понятия.

Пределами функции нами названы пределы изменения функции, изображенные крайними точками шкалы; пределы функции—алгебраические величины. Знак предела отвечает знаку функции; поэтому пределы положительных функций положительны, пределы отрицательных функций отрицательны.

Нижним пределом функции названа минимальная по относительному значению величина предела функции, которая должна быть изображена на чертеже; поэтому для положительных функций нижний предел функции отвечает минимальному абсолютному значению функции, а для отрицательных—ее максимальному абсолютному значению.

Верхним пределом функции названа максимальная по относительному значению величина предела функции; поэтому для положительных функций верхний предел функции отвечает максимальному абсолютному значению функции, а для отрицательных функций—ее минимальному абсолютному значению.

Нижнему пределу функции на номограмме отвечает *нижний конец шкалы*, верхнему пределу—*верхний конец шкалы*.

Интервалом функции названа разность между пределами функции; интервал функции всегда положительная величина.

Коэфициентом шкалы называется отношение интервала функции к длине ее шкалы.

Расстояние нижнего конца шкалы от общей опорной линии, перпендикулярной к направлению шкал, называется *опорной* длиной шкалы; соответствующий ей интервал функции называется *опорным интервалом* функции.

Моментом коэфициента шкалы относительно какой-либо точки R названо произведение коэфициента шкалы на расстояние от этой точки до шкалы функции.

Функции, стоящие в левых сторонах равенств (2), называются *слагаемыми* функциями; функции, стоящие в правых сторонах этих равенств—*суммарными* функциями.

Введем обозначения:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \mu_1, \nu_1$ — нижние пределы переменных,

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots \mu_2, \nu_2$ — верхние пределы переменных,

$F_1(\alpha_1), F_2(\beta_1), F_3(\gamma_1), \ldots F_m(\mu_1), F_n(\nu_1)$ — нижние пределы функции,

$F_1(\alpha_2), F_2(\beta_2), F_3(\gamma_2), \ldots F_m(\mu_2), F_n(\nu_2)$ — верхние пределы функции,

$h_a, h_b, h_c, \ldots h_m, h_n$ — длина основных шкал,

$g_a, g_b, g_c, \ldots g_m, g_n$ — длина опорных шкал,

$A, B, C, \ldots M, N$ — интервалы функции,

$a, b, c, \ldots m, n$ — коэфициенты шкал,

$A_0, B_0, C_0, \ldots M_0, N_0$, — опорные интервалы функции,

$L_a, L_b, L_c, \ldots L_m, L_n$ — расстояния от шкал до точки R,

$M_a, M_b, M_c, \ldots M_m, M_n$ — моменты коэфициентов, шкал относительно точки R.

На основании данных выше определений можем записать: для шкалы функции независимой переменной $F_1(\alpha)$:

$$A = F_1(\alpha_2) - F_1(\alpha_1) \tag{3}$$

$$a = \frac{A}{h_a} \tag{4}$$

$$A_0 = a\,g_a \tag{5}$$

$$M_a = a\,L_a \tag{6}$$

Для всех остальных функций независимых переменных $F_2(\beta)$, $F_3(\gamma), \ldots F_m(\mu)$ могут быть написаны выражения, аналогичные уравнениям (3) до (6).

Для шкалы функции зависимой переменной $F_n(\nu)$ имеем:

$$N = F_n(\nu_2) - F_n(\nu_1) \tag{7}$$

$$h_n = \frac{N}{n} \tag{8}$$

$$g_n = \frac{N_0}{n} \tag{9}$$

$$M_n = n\,L_n \tag{10}$$

Здесь уравнения (8) и (9) написаны несколько иначе вследствие того, что определяемыми величинами являются длины шкал h_n и g_n.

В результате несложных выкладок можно показать, что между упомянутыми выше величинами существуют простые соотношения, которые позволяют притти к следующим общим свойствам параллельных шкал.

1. Нижний предел функции зависимой переменной равен алгебраической сумме нижних пределов всех заданных функций независимых переменных; знаки пределов отвечают знакам функции, т. е.

$$F_n(\nu_1) = F_1(\alpha_1) \pm F_2(\beta_1) \pm F_3(\gamma_1) \pm \ldots \pm F_m(\mu_1). \tag{11}$$

2. Верхний предел функции зависимой переменной равен алгебраической сумме верхних пределов всех заданных функций независимых переменных; знаки пределов отвечают знакам функции, т. е.

$$F_n(\nu_2) = F_1(\alpha_2) \pm F_2(\beta_2) \pm F_3(\gamma_2) \pm \quad . \quad . \quad . \pm F_m(\mu_2) \tag{12}$$

3. Интервал функции зависимой переменной равен сумме интервалов всех заданных функций независимых переменных, т. е.

$$N = A + B + C + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . + M. \tag{13}$$

4. Коэфициент шкалы любой суммарной вспомогательной функции равен сумме коэфициентов шкал всех слагаемых функций независимых переменных; например, для первого звена номограммы

$$r = a + b, \tag{14}$$

где r — коэфициент шкалы вспомогательной функции ρ; для второго звена

$$s = a + b + c, \tag{15}$$

где s — коэфициент шкалы вспомогательной функции σ и т. д.

5. Коэфициент шкалы функции зависимой переменной равен сумме коэфициентов шкал всех заданных функций независимых переменных, т. е.

$$n = a + b + c + \quad . \quad . \quad . + m. \tag{16}$$

6. Опорный интервал функции зависимой переменной равен сумме опорных интервалов всех заданных функций независимых переменных, т. е.

$$N_0 = A_0 + B_0 + C_0 + \quad . \quad . \quad . \quad . + M_0 \tag{17}$$

7. В каждом звене номограммы, построенном для последовательного графического решения системы уравнений (2), произведение коэфициентов шкал функций этого звена на их расстояния от шкалы первой функции данного звена равны друг другу; так, например, в первом звене номограммы имеем:

$$b\, l_1 = r\, r_1, \tag{18}$$

где l_1 и r_1 расстояния от начала звена (шкала функции $F_1(\alpha)$) до шкал функции $F_2(\beta)$ и ρ, соответственно. Аналогично, во втором звене номограммы имеем:

$$c\, l_2 = s\, r_2, \tag{19}$$

где l_2 и r_2 расстояния от начала второго звена (немая шкала вспомогательной функции ρ) до шкал функции $F_3(\gamma)$ и σ, соответственно.

8. Момент коэфициента шкалы функции зависимой переменной относительно любой точки R равен сумме моментов коэфициентов шкал всех заданных функций независимых переменных относительно той же точки R, т. е.

$$M_n = M_a + M_b + M_c + \quad . \quad . \quad . + M_m. \tag{20}$$

9. Уравнение шкалы любой функции есть отношение разности функции и ее нижнего предела к коэфициенту шкалы; оно имеет знак

функции, т. е. у положительных функций имеет знак плюс, а у отрицательных функций—знак минус. Так, уравнение шкалы функции

$$F_1(\alpha) \; . \; . \; . \; . \; . \; y_a = \frac{F_1(\alpha) - F_1(\alpha_1)}{a} \qquad (21)$$

$$-F_3(\gamma) \; . \; . \; . \; . \; y_c = -\frac{F_3(\gamma) - F_3(\gamma_1)}{c} \qquad (22)$$

$$F_n(\nu) \; . \; . \; . \; . \; . \; y_n = \frac{F_n(\nu) - F_n(\nu_1)}{n} \qquad (23)$$

Изложенные в настоящей работе свойства параллельных шкал номограмм для функции многих переменных являются по существу следствием одного общего свойства этих шкал, которое может быть сформулировано следующим образом.

Шкалы суммарных вспомогательных функций, равно как и шкала функции зависимой переменной аккумулируют в себе признаки шкал заданных слагаемых функций. Первичными признаками, которые должны быть выбраны в качестве характеристики шкал, и которые могут быть положены в основу суммирования, являются пределы функции и коэфициенты шкал. Вторичными признаками шкал, которые являются следствием первичных признаков и которые также поддаются суммированию, являются интервалы функции и моменты коэфициентов шкал.

Пользуясь полученными зависимостями, можно составить таблицу-алгорифм номограммы, расчет которой не представит затруднений. Для градуировки могут служить уравнения шкал функций.

Для контроля правильности расчета пределов функции и их интервалов служат параллельные зависимости, выражаемые уравнениями (7), (11) и (12), с одной стороны, и (13), с другой; для контроля правильности расчета коэфициентов шкал и взаимных расстояний между шкалами—уравнения (10) и (20).

Более подробное изложение вопроса, вместе с выводом приведенных в настоящем сообщении формул и практическим примером расчета и построения номограммы, содержится в другой работе автора, подготовленной им к печати.

Институт Геологических Наук
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1950, май.

ԳԵՈՐԳ ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Մի քանի փոփոխականներով ֆունկցիաների զուգահեռ թվատախտակներով նոմոգրամների մի ընդհանուր հատկության մասին

Հեղինակը հետազոտել է մի քանի փոփոխականներով ֆունկցիաների զուգահեռ թվատախտակներով նոմոգրամներ, ընդորում հանգելով այդ ֆունկցիաների հավասարումների, թվատախտակների, երկարությունների և փոխադարձ հեռավորությունների միջև

եղած պարզ առնչությունների, որոնք թույլ են տալիս, նոմոգրամի լուծման ընթացքում օգտագործելով ալգորիթմը, կատարել հաշվումները և նրանց ստուգումները, մինչև նոմոգրամի կառուցումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Н. М. Герсеванов*. Теория и построение инженерных номограмм. ОНТИ, М—Л., 1937. 2. *Н. А. Глаголев*. Теоретические основы номографии. ОНТИ, М—Л, 1936. 3. *М. В. Пентковский*. Номография. ГИТТЛ, М—Л. 1949.