

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Расчет слоистых оболочек вращения

(Представлено А. Г. Назаровым 6 VII 1949)

1. Большой практический интерес представляют симметрично нагруженные оболочки вращения, которые составлены из однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Считаем, что материал каждого слоя подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии.

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала оболочки будет параллельна срединной поверхности, а остальные две перпендикулярны к меридианам и параллелям срединной поверхности.

Считаем также, что для всего пакета в целом справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява.

2. Здесь рассматриваем решения задач оболочек вращения положительной гауссовой кривизны, для которых за относительные деформации можно принять:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{du}{ds} + \frac{1}{R_1} w, & \epsilon_2 &= -\frac{\sin \alpha}{r} u + \frac{1}{R_2} w \\ \kappa_1 &= -\frac{d^2 w}{ds^2}, & \kappa_2 &= \frac{\sin \alpha}{r} \frac{dw}{ds}^*\end{aligned}\tag{2.1}$$

Выражения для относительных деформаций (2,1) получены на основании известных соотношений В. З. Власова⁽¹⁾, данных для пологих оболочек, которые, как показали дальнейшие исследования^(2,3), с успехом могут быть применены при расчете широкого класса оболочек, в том числе и замкнутых.

С точностью формул (2,1) уравнение неразрывности можно представить:

$$r \frac{d\epsilon_2}{ds} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sin \alpha + \frac{dw}{ds} \cos \alpha.\tag{2.2}$$

Имея относительные деформации ϵ_1 , ϵ_2 и нормальное перемещение w

* Здесь и в дальнейшем придерживаемся известных обозначений^(1,2).

можно получить формулы для расчета радиального (по направлению r) и осевого перемещений (²):

$$\xi = r\epsilon_2, \quad \zeta = \zeta_0 + \int_{s_0}^s \left(\epsilon_1 \cos \alpha + \frac{dw}{ds} \sin \alpha \right) ds, \quad 2.3$$

где ζ_0 — жесткое смещение оболочки вдоль оси вращения.

3. Напряженное состояние слоистой оболочки вращения определяется обобщенными силами T_1 , T_2 , N_1 и обобщенными изгибающими моментами G_1 и G_2 . Под действием этих сил дифференциальный элемент оболочки находится в равновесии. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (rT_1) + T_2 \sin \alpha + \frac{r}{R_1} N_1 + rX &= 0 \\ \frac{d}{ds} (rN_1) - r \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + rZ &= 0 \\ \frac{d}{ds} (rG_1) + G_2 \sin \alpha + rN_1 &= 0. \end{aligned} \quad 3.1$$

Из этих уравнений получим:

$$\begin{aligned} (-T_1 \sin \alpha + N_1 \cos \alpha) r &= V - \int_{s_0}^s rE_r ds \\ (T_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha) r &= - \int_{s_0}^s rE_z ds + r_0 p^0, \end{aligned} \quad 3.2$$

где введены следующие обозначения:

$$E_r = Z \cos \alpha - X \sin \alpha, \quad E_z = Z \sin \alpha + X \cos \alpha$$

$$T_2 = \frac{dV}{ds}, \quad p^0 = T_1^0 \cos \alpha_0 + N_1^0 \sin \alpha_0.$$

Постоянное $p^0 = \frac{P_z^0}{2\pi r_0}$ является осевым усилием распределенным по параллельному кругу $s = s_0$ радиуса r_0 . P_z^0 — главный вектор внешних сил, приложенных к указанной грани (³). После совместного решения уравнений (3,2) получим:

$$rT_1 = -V \sin \alpha + \Phi_1(s), \quad rN_1 = V \cos \alpha + \Phi_2(s), \quad 3.3$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \sin \alpha \int_{s_0}^s rE_r ds + \cos \alpha \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s rE_z ds \right) \\ \Phi_2(s) &= -\cos \alpha \int_{s_0}^s rE_r ds + \sin \alpha \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s rE_z ds \right). \end{aligned} \quad 3.4$$

Подставляя значения N_1 из (3.3) в третье уравнение равновесия, получим:

$$\frac{d}{ds} (r G_1) + G_2 \sin \alpha + V \cos \alpha = -\Phi_2(s). \quad 3.5$$

Все уравнения и соотношения, данные в п^о 2 и 3, справедливы как для изотропных, так и для анизотропных оболочек.

4. Из обобщенного закона Гука для нормальных напряжений m -го слоя имеем⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} \sigma_s^m &= \frac{E_s^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} [(\epsilon_1 + \mu_2^m \epsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \mu_2^m \kappa_2)] \\ \sigma_\varphi^m &= \frac{E_\varphi^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} [(\epsilon_2 + \mu_1^m \epsilon_1) + \gamma(\kappa_2 + \mu_1^m \kappa_1)], \end{aligned} \quad 4.1$$

где E_s^m и E_φ^m — модули упругости m -го ортотропного слоя, $\mu_1^m = \frac{B_{12}^m}{B_{22}^m}$, $\mu_2^m = \frac{B_{12}^m}{B_{11}^m}$ соответствующие коэффициенты Пуассона.

В отличие от однородных оболочек для слоистых оболочек значительный интерес представляют также касательные напряжения τ^m .

Из уравнений равновесия элемента объема m -го слоя оболочки имеем:

$$\tau^m = -\frac{1}{r} \int \left[\frac{d}{ds} (r \sigma_s^m) + \sigma_\varphi^m \sin \alpha \right] d\gamma + \varphi_m(s), \quad 4.2$$

где $\varphi_m(s)$ — постоянное интегрирования.

Подставляя значения σ_s^m и σ_φ^m из (4.1) в (4.2) и интегрируя, получим;

$$\tau^m = -\gamma \epsilon(B_{ik}^m) - \frac{\gamma^2}{2} \kappa(B_{ik}^m) + \varphi_m(s), \quad 4.3$$

где операторы

$$\begin{aligned} \epsilon(a_{ik}^m) &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{ds} [r (a_{11}^m \epsilon_1 + a_{12}^m \epsilon_2)] + (a_{22}^m \epsilon_2 + a_{12}^m \epsilon_1) \sin \alpha \right\} \\ \kappa(a_{ik}^m) &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{ds} [r (a_{11}^m \kappa_1 + a_{12}^m \kappa_2)] + (a_{22}^m \kappa_2 + a_{12}^m \kappa_1) \sin \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Здесь, учитывая, что функцией по сравнению с ее производной можно пренебречь, для операторов получим:

$$\epsilon(a_{ik}^m) = a_{11}^m \frac{d\epsilon_1}{ds} + a_{12}^m \frac{d\epsilon_2}{ds} \quad 4.4$$

$$\kappa(a_{ik}^m) = a_{11}^m \frac{d\kappa_1}{ds} + a_{12}^m \frac{d\kappa_2}{ds}.$$

Постоянные $\varphi_m(s)$ определяем из условий контакта смежных слоев и на внешних поверхностях⁽⁴⁾:

1) на верхней ($\gamma = \delta$) и на нижней ($\gamma = -\delta$) поверхностях при $\gamma = \delta$, $\tau^{2n+1} = X$, при $\gamma = -\delta$, $\tau^1 = 0$,

2) на поверхностях контакта слоев:

при $\gamma = \delta_m$ $\tau^m = \tau^{m-1}$ ($m = n+1, n+2, \dots, 2n$)

при $\gamma = -\delta_m$ $\tau^m = \tau^{m-1}$ ($m = 2, 3, \dots, n+1$).

Как нами показано⁽⁴⁾, в силу гипотезы Кирхгофа-Лява, данной для всего пакета оболочки в целом, нет необходимости удовлетворения условий контакта в перемещениях, так как они удовлетворяются автоматически.

Воспользовавшись условиями контакта, для $\varphi_m(s)$ получим:

$$\varphi_m(s) = \frac{\delta^2}{2} \kappa(g_{ik}^m) + \delta \varepsilon(t_{ik}^m) + X \quad 4.5$$

при $m = n+1, n+2, \dots, 2n+1$,

$$\varphi_m(s) = \frac{\delta^2}{2} \kappa(g_{ik}^m) - \delta \varepsilon(t_{ik}^m) \quad 4.6$$

при $m = 1, 2, 3, \dots, n+1$,

где

$$g_{ik}^m = \frac{1}{\delta^2} \left[\delta_m^2 B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s^2 - \delta_{s+1}^2) \right]$$

$$t_{ik}^m = \frac{1}{\delta} \left[\delta_m B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \quad 4.7$$

где B_{ik}^m — упругие постоянные каждого слоя:

$$B_{11}^m = \frac{E_s^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_\varphi^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}$$

$$B_{12}^m = \frac{E_s^m \mu_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} = \frac{E_\varphi^m \mu_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}. \quad 4.8$$

Имея значения φ_m , для τ^m получим:

а) для верхних слоев до $(n+1)$ -го слоя включительно

$$\tau^m = X - \frac{\gamma^2}{2} \kappa(B_{ik}^{2n+2-m}) - \gamma \varepsilon(B_{ik}^{2n+2-m}) + \frac{\delta^2}{2} \kappa(g_{ik}^{2n+2-m}) + \delta \varepsilon(t_{ik}^{2n+2-m}); \quad 4.9$$

б) для нижних слоев до $(n+1)$ -го слоя включительно

$$\tau^m = - \frac{\gamma^2}{2} \kappa(B_{ik}^m) - \gamma \varepsilon(B_{ik}^m) + \frac{\delta^2}{2} \kappa(g_{ik}^m) - \delta \varepsilon(t_{ik}^m).$$

Воспользовавшись значениями нормальных напряжений, обобщенные усилия выразим помощью следующих формул:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{-\delta_{n+1}}^{\delta_{n+1}} \sigma_s^{n+1} d\gamma + \sum_{m=1}^n \left[\int_{-\delta_m}^{\delta_{2n+2-m}} \sigma_s^m d\gamma - \int_{-\delta_{m+1}}^{\delta_{2n+1-m}} \sigma_s^m d\gamma \right] \\
 T_2 &= \int_{-\delta_{n+1}}^{\delta_{n+1}} \sigma_\varphi^{n+1} d\gamma + \sum_{m=1}^n \left[\int_{-\delta_m}^{\delta_{2n+2-m}} \sigma_\varphi^m d\gamma - \int_{-\delta_{m+1}}^{\delta_{2n+1-m}} \sigma_\varphi^m d\gamma \right] \\
 G_1 &= - \int_{-\delta_{n+1}}^{\delta_{n+1}} \sigma_s^{n+1} \gamma d\gamma - \sum_{m=1}^n \left[\int_{-\delta_m}^{\delta_{2n+2-m}} \sigma_s^m \gamma d\gamma - \int_{-\delta_{m+1}}^{\delta_{2n+1-m}} \sigma_s^m \gamma d\gamma \right] \\
 G_2 &= - \int_{-\delta_{n+1}}^{\delta_{n+1}} \sigma_\varphi^{n+1} \gamma d\gamma - \sum_{m=1}^n \left[\int_{-\delta_m}^{\delta_{2n+2-m}} \sigma_\varphi^m \gamma d\gamma - \int_{-\delta_{m+1}}^{\delta_{2n+1-m}} \sigma_\varphi^m \gamma d\gamma \right];
 \end{aligned}$$

откуда получим:

$$T_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2, \quad T_2 = C_{22} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_1 \quad 4.11$$

$$G_1 = -(D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2), \quad G_2 = -(D_{22} \kappa_2 + D_{12} \kappa_1),$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{ik} &= 2 \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right] \\
 D_{ik} &= \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]. \quad 4.12
 \end{aligned}$$

5. Воспользовавшись полученными соотношениями, после некоторых преобразований получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned}
 L(V) - C_{22} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{W}{R_2} &= \Psi_1(s) \\
 L(W) + \frac{1}{D_{11}} \frac{V}{R_2} &= \Psi_2(s), \quad 5.1
 \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{dw}{ds} = W, \quad L(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{d(\cdot)}{ds} \quad 5.2$$

$$\Psi_1(s) = \frac{\nu_2}{r} \frac{d}{ds} \Phi_1(s) - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin \alpha}{r^2} \Phi_1(s) \quad 5.3$$

$$\Psi_2(s) = - \frac{1}{r D_{11}} \Phi_2(s)$$

$$\nu_1 = \frac{C_{12}}{C_{22}}, \quad \nu_2 = \frac{C_{12}}{C_{11}}. \quad 5.4$$

В отличие от существующих теорий, в системе (5.1) искомыми является, наряду с принятым V , новая функция $W = \frac{dw}{ds}$, которая является результатом наших исходных соотношений (2.1).

Введением новой искомой функции систему (5.1) можно представить уравнением:

$$L(\sigma) + \frac{i}{R_2} C\sigma = \Psi(s), \quad 5.5$$

где

$$\sigma = W - i \frac{C}{C_{22}(1 - \nu_1\nu_2)} V \quad 5.6$$

$$\Psi(s) = -\frac{1}{r D_{11}} \Phi_2(s) - i \frac{C}{r C_{22}(1 - \nu_1\nu_2)} \left[\nu_2 \frac{d}{ds} \Phi_1(s) - \frac{C_{22} \sin \alpha}{C_{11} r} \Phi_1(s) \right] \quad 5.7$$

$$C = \sqrt{\frac{C_{22}(1 - \nu_1\nu_2)}{D_{11}}}. \quad 5.8$$

6. За частное решение уравнения (5.5) берем решение безмоментной задачи⁽²⁾, которое для нашего случая имеет вид:

$$\sigma_0 = i \frac{C}{C_{22}(1 - \nu_1\nu_2)} \frac{\Phi_2(s)}{\cos \alpha}. \quad 6.1$$

Для усилий T_1 и T_2 получим:

$$T_1 = \frac{1}{R_2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) \quad 6.2$$

$$T_2 = -\frac{1}{R_1 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) + R_2 Z.$$

Сравнивая выражения (6.2) с соответствующими формулами изотропных оболочек⁽²⁾ замечаем, что они ничем не различаются, чего и надо было ожидать⁽⁶⁾.

7. Имея частное решение, задача расчета неоднородных анизотропных оболочек сводится к решению однородного уравнения:

$$\frac{d^2 \sigma}{ds^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{d\sigma}{ds} + i \frac{C}{R_2} \sigma = 0. \quad 7.1$$

Решение этого уравнения находим методом асимптотического интегрирования, при этом ограничиваемся лишь первым приближением, которое имеет погрешность порядка $\sqrt{\frac{\delta}{R}}$ по сравнению с единицей.

Интегрируя (7.1), получим:

$$\sigma = (A_1 \cos \beta - B_1 \sin \beta) e^{-\beta} + (A_2 \cos \beta + B_2 \sin \beta) e^{\beta} + \\ + i \left[(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (A_2 \sin \beta - B_2 \cos \beta) e^{\beta} \right], \quad 7.2$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные интегрирования

$$\beta = \sqrt{\frac{C}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{R_2}}. \quad 7.3$$

Сравнивая (7.2) с (5.6), для искомого получим:

$$W = (A_1 \cos \beta - B_1 \sin \beta) e^{-\beta} + (A_2 \cos \beta + B_2 \sin \beta) e^{\beta} \quad 7.4$$

$$V = - \frac{C_{22}(1 - \nu_1 \nu_2)}{C} \left[(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (A_2 \sin \beta - B_2 \cos \beta) e^{\beta} \right] - \\ - \frac{\Phi_2(s)}{\cos \alpha}. \quad 7.5$$

Последний член формулы (7.5) является частным решением задачи, заимствованным из (6.1).

8. Имея значения W и V , легко можно определить внутренние обобщенные усилия:

$$T_1 = \frac{C_{22}(1 - \nu_1 \nu_2)}{C} \left[(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (A_2 \sin \beta - B_2 \cos \beta) e^{\beta} \right] \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{1}{R_2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) \\ T_2 = - \frac{C_{22}(1 - \nu_1 \nu_2)}{\sqrt{2R_2 C}} \left\{ \left[(A_1 - B_1) \cos \beta - (A_1 + B_1) \sin \beta \right] e^{-\beta} + \right. \\ \left. + \left[(B_2 - A_2) \cos \beta - (A_2 + B_2) \sin \beta \right] e^{\beta} \right\} - \frac{1}{R_1 \cos^2 \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \right. \\ \left. - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) + R_2 Z \\ N_1 = - \frac{C_{22}(1 - \nu_1 \nu_2)}{C} \left[(A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (A_2 \sin \beta - B_2 \cos \beta) e^{\beta} \right] \frac{\cos \alpha}{r}.$$

Обобщенные изгибающие моменты:

$$G_1 = \frac{D_{11}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{C}{R_2}} \left\{ \left[(B_1 - A_1) \sin \beta - (B_1 + A_1) \cos \beta \right] e^{-\beta} + \right. \\ \left. + \left[(B_2 - A_2) \sin \beta + (B_2 + A_2) \cos \beta \right] e^{\beta} \right\}$$



$$G_2 = \frac{D_{22}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{C}{R_2}} \left\{ \left[\left(\mu_1 + \frac{\sin \alpha}{r} \right) (B_1 \sin \beta - A_1 \cos \beta) - \mu_1 (A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta) \right] e^{-\beta} + \left[\left(\mu_1 - \frac{\sin \alpha}{r} \right) (B_2 \sin \beta + A_2 \cos \beta) - \mu_1 (A_2 \sin \beta - B_2 \cos \beta) \right] e^{\beta} \right\}.$$

Из перемещений расчетный интерес представляет радиальное перемещение, которое можно определить посредством формулы

$$\xi = - \frac{r}{\sqrt{2CR_2}} \left\{ [(A_1 - B_1) \cos \beta - (A_1 + B_1) \sin \beta] e^{-\beta} + [(B_2 - A_2) \cos \beta - (A_2 + B_2) \sin \beta] e^{\beta} - \frac{R_2}{C_{22}(1 - \nu_1 \nu_2)} \left[\frac{1}{R_1 \cos \alpha} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) - r Z \right] \right\}.$$

Напряжения в каждом слое определяем посредством формул (4.1), (4.9), (4.10).

Из расчетных выражений этого p^0 можно получить расчетные формулы для однородных ортотропных оболочек ⁽⁶⁾, для оболочек, составленных из изотропных слоев, а также для изотропных оболочек ⁽²⁾.

Постоянные интегрирования A_1, A_2, B_1, B_2 определяем из граничных условий, которые, как и вся задача, должны быть симметричны относительно оси вращения.

Институт строительных материалов и сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, июнь.

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ

Պատման շեղանկոց բաղաճրճների հասկումը

Այստեղ ուսումնասիրվում են սիմետրիկ բեռնված պլատման թաղանթները, որոնք պատրաստված են օրտոտրոպ շերտերից:

Ցույց է տրված, որ խնդիրը բերվում է պարզ դիֆերենցիալ հավասարման, որը տալիս է վերջավոր լուծումներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. В. З. Власов. ПММ, 8, в. 5, 1944.
2. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек, 1947.
3. А. Л. Гольденвейзер, А. И. Лурье. ПММ, 11, в. 5, 1947.
4. С. А. Амбарцумян. ДАН Армянской ССР, 8, № 5, 1948.
5. С. А. Амбарцумян. Изв. АН Армянской ССР, 1, № 6, 1948.
6. С. А. Амбарцумян. ДАН Армянской ССР, 9, № 5, 1948.