ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XI 1949 1

ФИЗИКА

А. К. Товмасян

Вопрос о многократном рассеивании света при наличии флуоресценции

II*

(Представлено В. А. Амбарцумяном 2 IV 1949)

Сейчас рассмотрим случай, когда среда, обладающая рассеивающими свойствами, представляет собой совокупность плоско-параллельных слоев, причем среда эта ограничена с одной стороны некоторой плоскостью A, с другой—устремляется к бесконечности, и оптическая глубина ее бесконечно велика. Допустим, что на границу A падают лучи в различных направлениях. Косинус угла, образованного направлением падающих лучей и внутренней нормалью слоев, обозначим ξ. Интенсивность лучей, падающих в направлении ξ в частоте e порядковый обозначим $I_e(\xi)$. Допустим, что потоки этих лучей, которые проходят через единицу поверхности, перпендикулярной к их направлению, в единицу времени равны $I_e(\xi)$. В результате рассеиваний, которые вообще многократны, лучи выходят из среды в различных направлениях с некоторыми интенсивностями $I'_k(\eta)$, которые зависят от угла, образованного направлением выходящих лучей и нормалью, косинус этого угла обозначим η, а также от ξ.

$I'_k(\eta)$ выразятся через $I_e(\xi)$ следующим образом:

$$I'_k(\eta) = \Sigma \int_0^1 r_{ke}(\eta\xi)\, I_e(\xi)\, d\xi, \tag{15}$$

где $r_{ke}(\eta\xi)$ функции, характеризующие диффузную отражательную способность данной поверхности. Теперь наша задача найти функции $r_{ke}(\eta\xi)$.

Цель наша состоит в том, чтобы на основе созданной в 1942—1944 гг. В. А. Амбарцумяном новой теории рассеивания света в мутной среде [1,2] решить задачу этого трехмерного рассеивания для случая сферической индикатрисы, когда на конечную границу полубесконечной среды падают пучки параллельных лучей с двумя различными частотами ν_1 и ν_2 в направлениях ξ_1 и ξ_2 и интенсивностью I_1 и I_2.

---

* См. ДАН Армянской ССР, том IX, № 4, 1948 г.

Для составления функциональных уравнений этой задачи, мы используем инвариантность функций $r_{ke}(\eta\xi)$ в отношении такого преобразования, когда к границе A присоединяется тонкий слой Δz. Допустим, что взятый нами слой Δz тонок до такой степени, что при дальнейших вычислениях можно пренебрегать величиной Δz^2. В результате прибавления слоя Δz среда у нас будет иметь новую границу A'. На прежнюю границу A теперь будут падать ослабленные потоки прямых лучей, т. е. не I_e, а $I_e\left(1-\frac{\Delta\tau_e}{\xi_e}\right)$. В соответствии с этим, из этих потоков от границы A будут отражаться лучи, обладающие интенсивностью $\sum\limits_{e=1}^{2} I_e r_{ke}(\eta\xi_e)\left(1-\frac{\Delta\tau_e}{\xi_e}\right)$. Однако, при выходе через слой Δz, эти излучения будут ослаблены в $1-\frac{\Delta\tau_k}{\eta}$ раза. Таким образом, из падающих на границу A прямых лучей будут отражаться лишь те, интенсивность которых составляет $\sum\limits_{e=1}^{2} r_{ke}(\eta\xi_e)\, I_e\left(1-\frac{\Delta\tau_e}{\xi_e}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_k}{\eta}\right)$, $k=1,2$.

В частности, если $I_e=0$, то в частоте ν_1 отражается излучение, обладающее интенсивностью

$$r_{11}(\eta\xi_1)\, I_1\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\right).$$

С другой стороны, в результате прибавления слоя Δz возникают дополнительные излучения, состоящие из четырех слагаемых для каждой частоты. Вычислим сперва эти дополнительные излучения—по направлению η для частоты ν_1.

1. Слой Δz рассеивает часть проходящих через него прямых лучей с частотой ν_1, соответствующий прирост интенсивности отраженных лучей с частотой ν_1 равен

$$\frac{1}{2}\lambda_1 I_1\Delta\tau_1.$$

2. Часть лучей с частотой ν_1 и ν_2, рассеянных слоем Δz, направляется в сторону границы A и частично отражается от нее. Прирост интенсивности отраженных лучей равен:

$$\frac{\lambda_1}{2}\Delta\tau_1 I_1\int\limits_0^1 r_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1-\lambda_1}{2}\Delta\tau_1 I_1\int\limits_0^1 r_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

3. Слой Δz рассеивает наружу отраженные от границы A лучи. Соответствующий прирост интенсивности отраженных лучей частоты ν_1 равен

$$\frac{\lambda_1}{2}\frac{\Delta\tau_1}{\eta} I_1\int\limits_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\, d\zeta+\frac{1-\lambda_2}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta} I_1\int\limits_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\, d\zeta$$

4. Часть отраженных от границы A лучей рассеивается слоем Δz обратно и снова отражается границей A. В результате этого, интенсивность в частоте будет иметь следующий прирост:

$$\int_0^1 r_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\lambda_1\Delta\tau_1 I_1\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+(1-\lambda_2)\,\Delta\tau_2 I_1\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\,d\zeta\right]+$$

$$+\int_0^1 r_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[(1-\lambda_1)\Delta\tau_1 I_1\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+\lambda_2\,\Delta\tau_2 I_1\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\,d\zeta\right].$$

Теперь запишем условие, при котором, в результате всех приращений и уменьшений, интенсивность выходящих из границы A′ отраженных лучей остается равной $r_{11}(\eta\xi_1)I_1$.

$$r_{11}(\eta\xi_1)=r_{11}(\eta\xi_1)\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\right)+\frac{\lambda_1}{4}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}+\frac{\lambda_1}{2}\Delta\tau_1\int_0^1 r_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1-\lambda_1}{2}\Delta\tau_1\int_0^1 r_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+\frac{1-\lambda_2}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta}\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+$$

$$+\int_0^1 r_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\lambda_1\Delta\tau_1\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+(1-\lambda_2)\Delta\tau_2\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\,d\zeta\right]+$$

$$+\int_0^1 r_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[(1-\lambda_1)\Delta\tau_1\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\,d\zeta+\lambda_2\Delta\tau_2\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\,d\zeta\right].$$

Теперь, приняв, что $I_1=0$, а $I_2\neq 0$, уравнение, выражающее инвариантность интенсивности $r_{22}(\eta\xi_2)I_2$ отражающих лучей, представится в следующем виде:

$$r_{22}(\eta\xi_2)=r_{22}(\eta\xi_2)\left(1-\frac{\Delta\tau_2}{\xi_2}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_2}{\eta}\right)+\frac{\lambda_2}{4}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta}+$$

$$+\frac{\lambda_2}{2}\Delta\tau_2\int_0^1 r_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1-\lambda_2}{2}\Delta\tau_2\int_0^1 r_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_2}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta}\int_0^1 r_{22}(\zeta\xi_2)\,d\zeta+$$

$$+\frac{1-\lambda_1}{\eta}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\int_0^1 r_{12}(\zeta\xi_2)\,d\zeta+\int_0^1 r_{22}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\lambda_2\Delta\tau_2\int_0^1 r_{22}(\zeta\xi_2)\,d\zeta+\right.$$

$$+ (1-\lambda_1)\,\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{12}(\zeta\xi_2)\, d\zeta \Big] + \int_0^1 r_{21}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\Big[(1-\lambda_2)\,\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{22}(\zeta\xi_2)\, d\zeta +$$

$$+ \lambda_1 \Delta\tau_1 \int_0^1 r_{12}(\zeta\xi_2)\, d\zeta\Big].$$

Такие же уравнения получим, используя инвариантность $r_{12}(\eta\xi_2)$, $r_{21}(\eta\xi_1)$

$$r_{12}(\eta\xi_2) = r_{12}(\eta\xi_2)\left(1-\frac{\Delta\tau_2}{\xi_2}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\right) + \frac{1-\lambda_2}{4}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{2}\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1-\lambda_2}{2}\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1-\lambda_2}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\int_0^1 r_{22}(\zeta\xi_2)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\int_0^1 r_{12}(\zeta\xi_2)\, d\zeta + \int_0^1 r_{12}(\zeta\xi_2)\, d\zeta\Big[(1-\lambda_1)\,\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'} +$$

$$+ \lambda_1 \Delta\tau_1 \int_0^1 r_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\Big] + \int_0^1 r_{22}(\zeta\xi_2)\, d\zeta\Big[\lambda_2\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'} +$$

$$+ (1-\lambda_2)\,\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\Big].$$

$$r_{21}(\eta\xi_1) = r_{21}(\eta\xi_1)\left(1-\frac{\Delta\tau_1}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\Delta\tau_2}{\eta}\right) + \frac{1-\lambda_1}{4}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta} +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{2}\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1-\lambda_1}{2}\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1-\lambda_1}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_1}{\eta}\int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{2}\cdot\frac{\Delta\tau_2}{\eta}\int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\, d\zeta + \int_0^1 r_{21}(\zeta\xi_1)\, d\zeta\Big[(1-\lambda_2)\,\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{21}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'} +$$

$$+ \lambda_2\Delta\tau_2 \int_0^1 r_{22}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\Big] + \int_0^1 r_{11}(\zeta\xi_1)\, d\zeta\Big[\lambda_1\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{21}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'} +$$

$$+ (1-\lambda_1)\,\Delta\tau_1 \int_0^1 r_{22}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\Big].$$

Они и являются теми основными функциональными уравнениями, которым подчиняются функции $r_{ke}(\eta\xi_e)$, характеризующие диффузное отражение.

Введем функции $R_{ke}(\eta\xi_e)$, которые определяются следующим образом:

$$r_{ke}(\eta\xi_e) = \frac{\lambda_1}{4\eta} R_{ke}(\eta\xi_e). \tag{16}$$

Тогда, для функций $R_{ke}(\eta\xi_e)$ у нас будет система уравнений со следующими четырьмя функциями.

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi_1}\right) R_{11}(\eta\xi_1) = 1 + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1-\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{(1-\lambda_2)\gamma}{2}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$\left. + \frac{(1-\lambda_2)\gamma}{\lambda_1}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right] + \frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2\gamma}{\lambda_1}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]. \tag{17}$$

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi_2}\right) R_{22}(\eta\xi_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left\{1 + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{2\lambda_2}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{2\gamma\lambda_2}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$\left. + \frac{1-\lambda_1}{\lambda_2\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}\right] + \frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{1-\lambda_2}{\lambda_2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda_1}{\lambda_2\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]\right\}. \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{\gamma}{\xi_2}\right) R_{12}(\eta\xi_2) = \frac{(1-\lambda_2)\gamma}{\lambda_1}\left\{1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} +\right.$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda_1^2}{2(1-\lambda_2)\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+\frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{(1-\lambda_1)}{(1-\lambda_2)\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{\lambda_1}{(1-\lambda_2)\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]\right\}. \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\eta}+\frac{1}{\xi_1}\right)R_{21}(\eta\xi_1)=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}\left\{1+\frac{\lambda_1^2}{2(1-\lambda_1)}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\right.$$

$$+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1\lambda_2\gamma}{2(1-\lambda_1)}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{(1-\lambda_2)\gamma}{1-\lambda_1}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]+$$

$$\left.+\frac{\lambda_1^2}{4}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\left[\frac{\lambda_2\gamma}{1-\lambda_1}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]\right\} \qquad (20)$$

Обратим внимание на следующие свойства системы уравнений (17), (18), (19) и (20): если их удовлетворяют некоторые $R_{ke}(\eta\xi_e)$, то ту же систему уравнений должны удовлетворить функции $\bar{R}_{ke}(\eta\xi_e)=$ $=\frac{1-\lambda_e}{1-\lambda_k}\cdot\frac{\Delta\tau_e}{\Delta\tau_k}R_{ek}(\xi_e\eta)$ с перемещенными индексами и аргументами. С другой стороны, так как эта задача по физике имеет только данное единственное решение, то можно сказать, что уравнения (17), (18), (19) и (20) также имеют свое единственное регулярное решение. Если это так, то такое решение уравнений (17), (18), (19) и (20) удовлетворяет следующему условию:

$$R_{ke}(\eta\xi_e)=\frac{1-\lambda_e}{1-\lambda_k}\cdot\frac{\Delta\tau_e}{\Delta\tau_k}R_{ek}(\xi_e\eta)\,. \qquad (21)$$

Но в этом случае правую часть каждого из этих уравнений (17), (18), (19) и (20) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi_1}\right)R_{11}(\eta\xi_1)=\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1-\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{(1-\lambda_2)\gamma}{2}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}-$$

$$-\frac{1}{4}(1-\lambda_1-\lambda_2)\gamma\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (22)$$

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi_2}\right)R_{22}(\eta\xi_2)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{2\lambda_2}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{2\lambda_2\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}-$$

$$-\frac{\lambda_1}{4\lambda_2\gamma}(1-\lambda_1-\lambda_2)\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (23)$$

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{\gamma}{\xi_2}\right)R_{12}(\eta\xi_2)=\frac{(1-\lambda_2)\gamma}{\lambda_1}\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1^2}{2(1-\lambda_2)\gamma}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}-$$

$$-\frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-1)}{4(1-\lambda_2)}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^1 R_{12}(\zeta\xi_2)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (24)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\eta}+\frac{1}{\xi_1}\right)R_{21}(\eta\xi_1)=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}\left\{1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1^2}{2(1-\lambda_1)}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\lambda_1^2}{2}\int_0^1 R_{11}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda_1\lambda_2\gamma}{2(1-\lambda_1)}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}-$$

$$-\frac{\lambda_1\gamma}{4(1-\lambda_1)}(\lambda_1+\lambda_2-1)\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^1 R_{21}(\zeta\xi_1)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (25)$$

Обозначим:

$$\varphi_{11}(\eta)=1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{11}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (26)$$

$$\varphi_{22}(\eta)=1+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^1 R_{22}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (27)$$

$$\varphi_{12}(\eta)=\frac{1}{2}\int_0^1 R_{12}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (28)$$

$$\varphi_{21}(\eta)=\frac{1}{2}\int_0^1 R_{21}(\eta\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (29)$$

Тогда уравнения (22), (23), (24) и (25), (26), (27), (28) и (29) дают непосредственно структуру функций $R_{ke}(\eta\xi_e$ и $r_{ke}(\eta\xi_e)$

$$R_{11}(\eta\xi) = \frac{\left\{\varphi_{11}(\eta) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{11}(\xi) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\xi)\right\}}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}} - \frac{-\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\varphi_{12}(\xi)}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}} \tag{30}$$

$$R_{22}(\eta\xi) = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left\{\varphi_{22}(\eta) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{22}(\xi) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\xi)\right\}}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}} - \frac{-\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)}\varphi_{21}(\eta)\varphi_{21}(\xi)}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}} \tag{31}$$

$$R_{12}(\eta\xi) = \frac{\frac{(1-\lambda_2)\gamma}{\lambda_1}\left\{\varphi_{11}(\eta) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{22}(\xi) + \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\xi)\right\}}{\frac{1}{\eta}+\frac{\gamma}{\xi}} - \frac{-\frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-1)}{1-\lambda_1}\gamma\varphi_{12}(\eta)\varphi_{21}(\xi)}{\frac{1}{\eta}+\frac{\gamma}{\xi}} \tag{32}$$

$$R_{21}(\eta\xi) = \frac{\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1}\left\{\varphi_{22}(\eta) + \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{11}(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\xi)\right\}}{\frac{\gamma}{\eta}+\frac{1}{\xi}} - \frac{-\frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-1)}{1-\lambda_2}\varphi_{21}(\eta)\varphi_{12}(\xi)}{\frac{\gamma}{\eta}+\frac{1}{\xi}} \tag{33}$$

$$r_{11}(\eta\xi) = \frac{\frac{\lambda_1\xi}{4}\left\{\varphi_{11}(\eta) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{11}(\xi) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\xi)\right\}}{\eta+\xi} - \frac{-\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\varphi_{12}(\xi)}{\eta+\xi} \tag{34}$$

$$
r_{22}(\eta\xi) = \frac{\frac{\lambda_2 \xi}{4}\left\{\varphi_{22}(\eta) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{22}(\xi) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\xi)\right\}}{\eta+\xi} -
$$

$$
- \frac{\frac{\lambda_1^2(1-\lambda_2)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_2^2(1-\lambda_1)}\varphi_{21}(\eta)\varphi_{21}(\xi)}{\eta+\xi} \tag{35}
$$

$$
r_{12}(\eta\xi) = \gamma\xi \frac{\frac{1-\lambda_2}{4}\left\{\varphi_{11}(\eta) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{21}(\xi) + \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\xi)\right\}}{\eta\gamma+\xi} -
$$

$$
- \frac{\frac{\lambda_1^2(\lambda_1+\lambda_2-1)}{4(1-\lambda_1)}\varphi_{12}(\eta)\varphi_{21}(\xi)}{\eta\gamma+\xi} \tag{36}
$$

$$
r_{21}(\eta\xi) = \xi \frac{\frac{1-\lambda_1}{4}\left\{\varphi_{22}(\eta) + \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\eta)\right\}\left\{\varphi_{11}(\xi) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\xi)\right\}}{\eta+\gamma\xi} -
$$

$$
- \frac{\frac{\lambda_1^2(\lambda_1+\lambda_2-1)}{4(1-\lambda_2)}\varphi_{21}(\eta)\varphi_{12}(\xi)}{\eta+\gamma\xi}. \tag{37}
$$

Подстановки (26), (27), (28) и (29) в (30), (31), (32) и (33) дают следующие уравнения для функций $\varphi_{11}(\eta), \varphi_{22}(\eta)$, $\varphi_{12}(\eta)$ и $\varphi_{21}(\eta)$

$$
\varphi_{11}(\eta) = 1 + \frac{\lambda_1}{2}\left\{\varphi_{11}(\eta) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\eta)\right\}\eta\int_0^1 \frac{\varphi_{11}(\xi) + (1-\lambda_1)\varphi_{12}(\xi)}{\eta+\xi}d\xi -
$$

$$
- \frac{\lambda_1}{2}\eta\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\int_0^1\frac{\varphi_{12}(\xi)}{\eta+\xi}d\zeta \tag{38}
$$

$$
\varphi_{22}(\eta) = 1 + \frac{\lambda_2}{2}\left\{\varphi_{22}(\eta) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\eta)\right\}\eta\int_0^1\frac{\varphi_{22}(\xi) + \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2}\varphi_{21}(\xi)}{\eta+\xi}d\xi -
$$

$$
\frac{\lambda_1^2}{2}\eta\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)}\varphi_{21}(\eta)\int_0^1\frac{\varphi_{21}(\xi)}{\eta+\xi}d\xi \tag{39}
$$

$$
\varphi_{12}(\eta) = \frac{(1-\lambda_2)\gamma}{2\lambda_1}\left\{\varphi_{11}(\eta) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\eta)\right\}\eta\int_0^1\frac{\varphi_{22}(\xi) + \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\xi)}{\eta\gamma+\xi}d\xi -
$$

$$
- \frac{\lambda_1}{2}\eta\frac{\lambda_1+\lambda_2-1}{1-\lambda_1}\gamma\varphi_{12}(\eta)\int_0^1\frac{\varphi_{21}(\xi)}{\eta\gamma+\xi}d\xi \tag{40}
$$

$$\varphi_{21}(\eta)=\frac{1-\lambda_1}{2\lambda_1}\left\{\varphi_{22}(\eta)+\frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\varphi_{21}(\eta)\right\}\eta\int_0^1\frac{\varphi_{11}(\xi)+\frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_2}\varphi_{12}(\xi)}{\eta+\gamma\xi}\,d\xi-$$

$$-\frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2-1)}{2(1-\lambda_2)}\eta\varphi_{12}(\eta)\int_0^1\frac{\varphi_{21}(\xi)}{\eta+\gamma\xi}\,d\xi. \qquad (41)$$

После всего этого мы приходим к следующему заключению: функции $r_{ke}(\eta\xi)$, характеризующие диффузную отражательную способность среды, выражаются при помощи четырех вспомогательных функций $\varphi_{11}(\eta), \varphi_{22}(\eta), \varphi_{12}(\eta)$ и $\varphi_{21}(\eta)$, при чем все эти вспомогательные функции зависят только от одной переменной и определяются системой функциональных уравнений (38), (39), (40) и (41).

Поскольку в рассматриваемой физической задаче всегда λ_1 и $\lambda_2 \leqslant 1$, то система (38), (39), (40) и (41) может быть решена численно, методом последовательных приближений.

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, апрель.

Ա. Կ. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Լույսի բազմապատիկ ցրման խնդիրը ֆլյուորեսցենցիայի առկայության դեպքում

Աշխատության երկրորդ մասը նվիրված է լույսի եռաչափ ցրման խնդրի ուսումնասիրությանը: Կազմված է չորս ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեմ, որտեղ դիֆֆուզիոն անդրադարձման գործակիցները անկման և անդրադարձման անկյունների ֆունկցիա են: Միջավայրի անդրադարձման ընդունակությունները բնութագրող չորս $r_{ke}(\eta\xi)$ ֆունկցիաները երկու անկախ փոփոխականներից արտահայտված են չորս ուրիշ օժանդակ ֆունկցիաների $\varphi_{11}(\eta)$, $\varphi_{22}(\eta)$, $\varphi_{12}(\eta)$ և $\varphi_{21}(\eta)$ միջոցով, որոնցից յուրաքանչյուրը կախված է միայն մեկ փոփոխականից:

Այս չորս օժանդակ ֆունկցիաները որոշվում են (38), (39), (40) և (41) ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեմով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *В. А. Амбарцумян.* Теория рассеяния света в мутной среде в связи с некоторыми вопросами видимости. Елабуга, 1942. 2. *В. А. Амбарцумян.* Ученые записки ЛГУ, № 31, 1939. 3. *В. А Амбарцумян.* Теоретическая астрофизика. Москва—Ленинград, 1939.