ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XI 1949 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Бигармоническое уравнение в контурных производных

(Представлено 1 X 1949)

Здесь мы рассмотрим уравнение

$$\nabla^4 [w(x,y)] = \frac{\partial^4[w]}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4[w]}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4[w]}{\partial y^4}, \tag{1}$$

когда $w(x,y) = \Gamma(C)\; u(x,y) = \begin{matrix} 0 \text{ вне } D, \\ u\,(x,y) \text{ в } D, \end{matrix}$

причем C — гладкая замкнутая кривая, ограничивающая область D.

Было установлено нами в [1], что

$$A = \nabla^2 [w] = \nabla^2 w + \overset{(2)}{\Gamma}(C)\, w(s) + \overset{(1)}{\Gamma}(C)\, \frac{\partial w(s)}{\partial n}.$$

Совершая контурные операции согласно [1] над

$$\nabla^4 [w] = \nabla^2 [A],$$

найдем:

$$\nabla^4 [w] = q\,(x,y) + \overset{(1)}{\Gamma}(C) \left(\frac{\partial^3 w(s)}{\partial n\, \partial s^2} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial s^2\, \partial n} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial n^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho^2}\, \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) + \overset{(2)}{\Gamma}(C) \left(2\frac{\partial^2 w(s)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} \right) +$$
$$+ \overset{(3)}{\Gamma}(C) \left(\frac{1}{\rho}\, w(s) + \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) + \overset{(4)}{\Gamma}(C)\, w(s), \tag{2}$$

где $q(x,y) = \nabla^4 w$ и $\rho = \rho(s)$ радиус кривизны дуги C в точке s.

Следствие 1. Согласно [1] имеет место

$$\iint\limits_{D+C \subset T} \nabla^4 [w]\, dxdy = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_C \left(\frac{\partial^3 w(s)}{\partial n\, \partial s^2} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial n^3} - \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) ds =$$
$$= - \iint\limits_{D \subset T} q\,(x,y)\, dxdy, \tag{3}$$

поскольку $$\int_C \frac{\partial^3 w(s)}{\partial s^2 \partial n} ds = 0.$$

В частности, если бигармоническая функция не имеет особенностей в замкнутой области D, то

$$\int_C \left(\frac{\partial^3 w(s)}{\partial n \partial s^2} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial n^3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) ds = 0. \qquad (4)$$

Следствие 2. Простейшая бигармоническая функция, отвечающая

$$q(x,y) = \Gamma(x-\xi,\ y-\eta)$$

есть $$\frac{1}{8\pi} r^2 \lg r, \qquad \text{где} \qquad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Значение функции $w(x,y)$ в области D можно выразить через значения w и ее производных на C следующим образом:

$$w = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{C+D \subset T} \nabla^4[w]\, r^2 \lg r\, d\xi d\eta. \qquad (5)$$

Подставляя сюда значение $\nabla^4[w]$ и совершая необходимые операции, найдем окончательно

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{D \subset T} r^2 \lg r\, q(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_C \Bigg[r^2 \lg r \cdot \left(\frac{\partial^3 w(s)}{\partial n \partial s^2} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial s^2 \partial n} + \frac{\partial^3 w(s)}{\partial n^3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) - \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \lg r) \left(2 \frac{\partial^2 w(s)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w(s)}{\partial n^2} \right) + \qquad (6) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial n^2} (r^2 \lg r) \left(\frac{w(s)}{\rho} + \frac{\partial w(s)}{\partial n} \right) - \frac{\partial^3}{\partial n^3} (r^2 \lg r)\, w(s) \Bigg] ds. \end{aligned}$$

Институт строительных материалов и сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, сентябрь.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բիհարմոնիկ հավասարումներ կոնտուրային ածանցյալներով

Բիհարմոնիկ (1) հավասարումը, արտահայտված կոնտուրային ածանցյալներով, ունի (2) տեսքը։ Ըստ (1)-ի ստացված են (3), (4) և (6) բանաձևերով արտահայտված հետևությունները, որոնք բնորոշ են հատկապես բիհարմոնիկ ֆունկցիաների համար։

Մասնավորապես, (6) արտահայտությունը կապակցում է w (x, y)-ի նշանակությունը D տիրույթում w-ի և նրա ածանցյալների հետ C փակ սահուն կորի վրա, որ սահմանազատում է D տիրույթը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *А. Г. Назаров.* ДАН Армянской ССР, **7**, № 4, 1947.