ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XI 1949 1

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян, действ. чл. АН Армянской ССР

О наилучших приближениях в нежордановой области

(Представлено 10 VII 1949)

На плоскости комплексного аргумента наилучшие приближения достаточно подробно исследованы в случае ограниченных областей со связным дополнением ([1,2]).

Представляет интерес исследовать также Чебышевские приближения в случае областей с несвязным дополнением и выявить при этом качественно новое. Наиболее простой и одновременно наиболее интересной из такого типа областей является область топологически эквивалентная области, ограниченной двумя внутренне-соприкасающимися окружностями.

Пусть D_0 — область, ограниченная двумя такими окружностями C_1 и C_2 с точкой соприкасания A. D — область топологически эквивалентная D_0, ограниченная двумя замкнутыми Жордановыми кривыми S_1 и S_2 с точкой соприкасания также в точке A. Обозначим через ρ расстояние точки с аффиксом z до точки A. Предполагаем, что D находится в D_0.

Мы исследуем наилучшее приближение полиномами функций $f(z)$ регулярных в замкнутой области $\overline{D}$, допускаем, что при приближении к точке A с различных сторон функция $f(z)$ может принимать различные значения.

Очевидно, что если $f(z)$ не регулярна везде внутри S_1, то равномерное приближение полиномами к $f(z)$ в $\overline{D}$ невозможно. Однако, при наличии некоторой „весовой“ функции, достаточно быстро убывающей у точки A, такая аппроксимация возможна.

Доказано ([3]), что

$$\inf_{\{P_n(z)\}} \left\{ \max_{z \in \overline{D}} e^{-1/\rho^{1+\delta}} \cdot |f(z) - P_n(z)| \right\} \to 0$$

при $\delta > 0$ и $n \to \infty$.

Обозначив, как обычно

$$E_n(z) = \inf_{\{P_n(z)\}} \left\{ \max_{z \in \overline{D}} e^{-1/\rho^{1+\delta}} \left| f(z) - P_n(z) \right| \right\},$$

доказываем:

Теорема. При $\delta > 0$

$$1 - \frac{1}{\delta} + 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right) < \frac{\ln E_n(f)}{\ln {}^1/n} < 1 - \frac{2}{\delta} + 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

В случае аппроксимации функций регулярных на замкнутых совокупностях, не разбивающих плоскость, $E_n(f)$ убывает со скоростью общего члена убывающей геометрической прогрессии [см. (4)], т. е.

$$E_n(f) \sim e^{-c \cdot n} \qquad (c > 0).$$

В нашем случае, при $\delta > 0$,

$$\ln E_n(f) > n^{1 - c/\delta}, \quad c - \text{const}.$$

Для получения скорости прогрессии мешает слагаемое $-\dfrac{c}{\delta}$, которое обратится в нуль при $\delta \to \infty$.

Таким образом, в отличие от аппроксимации на замкнутых совокупностях видим, что в случае совокупностей разбивающих плоскость, даже если подобран вес, гарантирующий равномерную аппроксимацию на замкнутой совокупности, все же для убывания наилучшего приближения скорости прогрессии не получим.

Аналогичные оценки наилучших приближений можно сделать и для других нежордановых, а также неограниченных областей.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, июнь.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Ոչ-ժորդանյան տիրույթներում Չեբիշևյան մոտավորությունների խնդրի շուրջը

Հայտնի է (4), որ եթե տվյալ փակ բազմությունը հարթությունը մասերի չի բաժանում, այդ դեպքում նրա վրա անալիտիկ ֆունկցիային կարելի է մոտենալ պրոգրեսիայի արագությամբ։

Ապացուցում ենք, որ եթե տվյալ բազմությունը հարթությունը բաժանում է մասերի և ընտրված է այնպիսի կշռային ֆունկցիա, որ փակ բազմության վրա տեղի ունի հավասարաչափ մոտավորություն, այնուամենայնիվ, ընդհանուր դեպքում, այդ փակ բազմության վրա անալիտիկ ֆունկցիաների Չեբիշևյան մոտավորությունը չի կարող նվազել պրոգրեսիայի արագությամբ։

Մենք բերում ենք այդ բանի քանակական արտահայտությունը երկու, իրար շոշա-

փող շրջանագծերով կազմված լուսնաձև տիրույթի համար։ Հայտնի է, որ եթե f (z)-ը հոլոմորֆ է այդ փակ տիրույթում, ապա

$$\inf_{\{P_n(z)\}} \left\{ \max e^{-1/\rho^{1+\delta}} \, | f(z) - P_n(z) | \right\} \to 0,$$

որտեղ $\delta > 0$, իսկ $P_n(z)$-ը բազմանդամներ են և $n \to \infty$ (3)։ Նշանակելով, ինչպես ընդունված է,

$$E_n(z) = \inf_{\{P_n(z)\}} \left\{ \max e^{-1/\rho} \, | f(z) - P_n(z) | \right\},$$

ապացուցում ենք, որ երբ $\delta > 0$

$$1 - \frac{1}{\delta} + 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right) < \frac{\ln E_n(f)}{\ln \frac{1}{n}} < 1 - \frac{2}{\delta} + 0\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Հարթությունը մասերի չբաժանող փակ բազմության վրա անալիտիկ ֆունկցիաների համար

$$E_n(f) \sim e^{-cn}, \qquad (c > 0)$$

մինչդեռ տվյալ դեպքում

$$\ln E_n(f) > n^{1-\frac{c}{\delta}} \qquad (C - \text{const.}).$$

Պրոգրեսիայի արագություն ստանալու համար այստեղ խանգարում է $-c/\delta$ հաստատունը, որը $\to 0$, երբ $\delta \to \infty$։

Լավագույն մոտավորությունների նման գնահատականներ հնարավոր է լինում տալ մի շարք անսահմանափակ տիրույթների համար (անկյուն, շերտ և այլն)։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *W. E. Sewell.* Degree of approximation by polynomials... Princeton, 1942. 2. *С. Н. Мергелян.* ДАН Армянской ССР, **6**, № 4, 1947; ДАН СССР, **61**, № 6, 1948; **62**, № 1, 1949; **62**, № 2, 1949. 3. *А. Л. Шагинян.* ДАН СССР, **48**, № 1 1945. 4. *J. L. Walsh.* Münchener Berichte, 223—229, 1926.