

В. А. Тонян

Об одной задаче Монтеля

(Представлено А. Л. Шагиняном 26 V 1949)

Монтелем⁽¹⁾ была поставлена следующая задача:

Может ли существовать целая функция, допускающая совершенное, нигде не плотное множество направлений Жюлиа?

В настоящей заметке мы приводим теорему, дающую ответ на этот вопрос.

Теорема гласит:

Пусть m — замкнутое, нигде не плотное подмножество единичной окружности e ; $f(\varphi)$ определенная на e функция, принадлежащая классу 0 или 1 Бэра и принимающая на интервалах смежных с m постоянные значения (∞ не исключается).

При этих условиях существует целая функция $G(z)$, которая

1° во всякой замкнутой угловой области, имеющей вершину в начале и не содержащей точек множества m , равномерно стремится к соответствующей вышеуказанной постоянной при $z \rightarrow \infty$, и для которой

2° любой луч, исходящий из начала и пересекающий окружность в точке принадлежащей m , является направлением Жюлиа.

Пусть $G(z)$ целая функция, стремящаяся по всем лучам, исходящим из начала, к определенным пределам или к ∞ .

Назовем углом сходимости $G(z)$ замкнутый угол с вершиной в начале, в котором или $G(z)$ или же $\frac{1}{G(z)}$ равномерно стремится к одной и той же постоянной.

Если $G(z)$ допускает внутри угла три пикаровских исключительных значения, то, как нетрудно доказать, такой угол есть угол сходимости функции $G(z)$.

Значит, если какой-либо луч не является биссектрисой угла сходимости $G(z)$, то в любом угле, содержащем этот луч строго внутри, $G(z)$ принимает все значения, за исключением быть может двух, бесконечное число раз. Такой луч, как известно, называется направлением Жюлиа.

Таким образом: множество направлений Жюлиа совпадает с множеством лучей, исходящих из начала и не являющихся биссектрисами углов сходимости. Приведем две легко доказуемые леммы.

Лемма I. Множество углов сходимости функции, стремящейся по всем лучам, исходящим из начала к определенным пределам или к ∞ , всюду плотно на плоскости.

Следствие. Множество направлений Жюлиа нигде не плотно.

Лемма II. Пусть $P_1, P_2, \dots$ — неограниченные области, границы которых не сгущаются в конечной части плоскости и $Q_1, Q_2, \dots$ замкнутые множества такие, что $Q_n \in P_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть, далее, $f_1(z), f_2(z), \dots$ совокупность функций таких, что функция $f_n(z)$ регулярна и однозначна в P_n ($n = 1, 2, \dots$).

Если существует возрастающая функция $\eta(t)$ $\{\eta(t) \rightarrow \infty, \text{ при } t \rightarrow \infty\}$ такая, что любую точку $\xi \in \sum_{v=1}^{\infty} P_v$ можно соединить с бесконечно удаленной точкой непрерывной кривой, лежащей вне круга $|z| < \eta(|\xi|)$ и не имеющей общих точек с $\sum_{v=1}^{\infty} P_v$, то существует целая функция $G(z)$ такая, что разности

$$\{G(z) - f_n(z)\}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

равномерно стремятся к нулю, при $Q_n \ni z \rightarrow \infty$.

Теперь приведем, в общих чертах, доказательство основной теоремы.

Пусть $f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots$ последовательность непрерывных функций, сходящаяся к $f(\varphi)$.

Положим

$$h(0) = f_0(\varphi) = 0$$

и

$$h(re^{i\varphi}) = f_n(\varphi) + (n-r) \{f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi)\},$$

$$\text{при } n-1 < r \leq n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$h(z)$ — функция непрерывная на всей плоскости.

Имеем при $n-1 < r \leq n$

$$|h(re^{i\varphi}) - f_n(\varphi)| \leq |f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi)|,$$

откуда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(re^{i\varphi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\varphi) = f(\varphi). \quad (1)$$

Множество M лучей, исходящих из начала и проходящих через точки множества m , замкнутое, нигде не плотное.

Согласно известной теореме⁽²⁾ существует целая функция $G_m(z)$ такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |G_m(z) - h(z)| = 0$$

равномерно, при $z \in M$. откуда, учитывая (1), получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_{\mu}(re^{i\varphi}) = f(\varphi), \text{ при } e^{i\varphi} \in m.$$

Введем следующие обозначения:

1. $d_1, d_2, d_3, \dots$ — интервалы смежные с m ;
2. M_n — угловая область, для которой $M_n \cdot e = d_n$;
3. l_n — замкнутое подмножество M_n , для которого

$$\rho(\bar{M}_n - M_n, l_n) = 1;$$

4. D_n — замкнутая подобласть M_n , для которой

$$\rho(\bar{M}_n - M_n^*, D_n) \geq 2.$$

Легко видеть, что области, покрывающие множества $\{D_n\}$, $\{l_n\}$, и M с границами, отстоящими от соответствующих множеств не больше, чем на $\frac{1}{2}$, удовлетворяют условиям леммы II.

Функция $f(\varphi)$ принимает на дугах $d_1, d_2, d_3, \dots$ постоянные значения $C_1, C_2, C_3, \dots$

Соотнесем покрытия областей $\{D_n\}$, $\{l_n\}$ и M соответственно регулярные в них функции $\{C_n\}$ (если $C_n \neq \infty$) и z (если $C_n = \infty$), числа K_n ($K_n \neq C_n$) и $G_m(z)$.

Согласно лемме II существует целая функция $G(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{G(z) - G_m(z)\} = 0, \text{ при } z \in M \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{если } C_n \neq \infty \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{G(z) - C_n\} &= 0, \text{ при } z \in D_n \\ \text{если } C_n = \infty \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \{G(z) - z\} &= 0, \text{ при } z \in D_n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{G(z) - K_n\} = 0, \text{ при } z \in l_n. \quad (4)$$

Из (3) следует, что $G(z)$ во всякой замкнутой угловой области, пересекающейся с окружностью по дуге, принадлежащей d_n , равномерно стремится к C_n .

Покажем, что $G(z)$ сходится неравномерно в угле N , пересечение которого с окружностью не целиком принадлежит одной из дуг d_ν . Так как множество дуг d_ν всюду плотно, то дуга $N \cdot e$ будет содержать часть какой-нибудь дуги d_μ и функция $G(z)$ по лучам, принадлежащим N и пересекающим окружностью по дуге d_μ будет стремиться к C_μ . Прямая l_μ , начиная с некоторого места, попадает в угол N и, следова-

тельно, в угле N функция $G(z)$ кроме C_μ будет согласно (4) стремиться также и к K_μ , чем и доказывается неравномерность сходимости в N .

Таким образом, ни один из углов, для которых лучи, принадлежащие M , являются биссектрисами, не есть угол сходимости для $G(z)$ и, следовательно, в силу сказанного выше, множество M является множеством направлений Жюлиа функции $G(z)$.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, май.

Վ. Ա. ՏՈՆՅԱՆ

Մոնելի մի խնդրի մասին

Հետևյալ խնդիրը առաջադրել է Մոնելը.—

Գոյություն ունի արդյոք այնպիսի ամբողջ ֆունկցիա, որի ժուլիայի ուղղությունների բազմությունը կատարյալ և ամենուրեք նոսր է:

Ներկա հոդվածը նվիրված է այդ հարցի ուսումնասիրությանը: Հիմնական թեորեմը հետևյալն է. —

Դիցուք m -ը e միավոր շրջանագծի փակ, ամենուրեք նոսր ենթաբազմությունն է և $(f\varphi)$ -ն e -ի վրա որոշված Բեռնի 0 կամ 1 դասին պատկանող ֆունկցիա, որը m -ի կից միջակայքներում ընդունում է հաստատուն արժեքներ: Այս պայմանների դեպքում գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ ֆունկցիա, որը

1^o սկզբնականից ելնող և m -ի կետերից գերծ յուրաքանչյուր փակ տնկյան մեջ հավասարաչափ ձգտում է նշված համապատասխան հաստատուններին և որի համար

2^o սկզբնականից ելնող և շրջագիծը m -ին պատկանող կետում հատող ճառագայթը ժուլիայի ուղղությունն է:

Հաստատված են նաև բավարար և տնհրաժեշտ պայմաններ, որոնց տեղի ունենալու դեպքում տվյալ ֆունկցիան կհանդիսանա ամբողջ ֆունկցիայի ճառագայթային սահմանային ֆունկցիա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. P. Montel. Leçon sur les Familles Normales, p. 85, 1927. 2. М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев. ДАН СССР, 23, 746—748, 1939.