ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 3

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

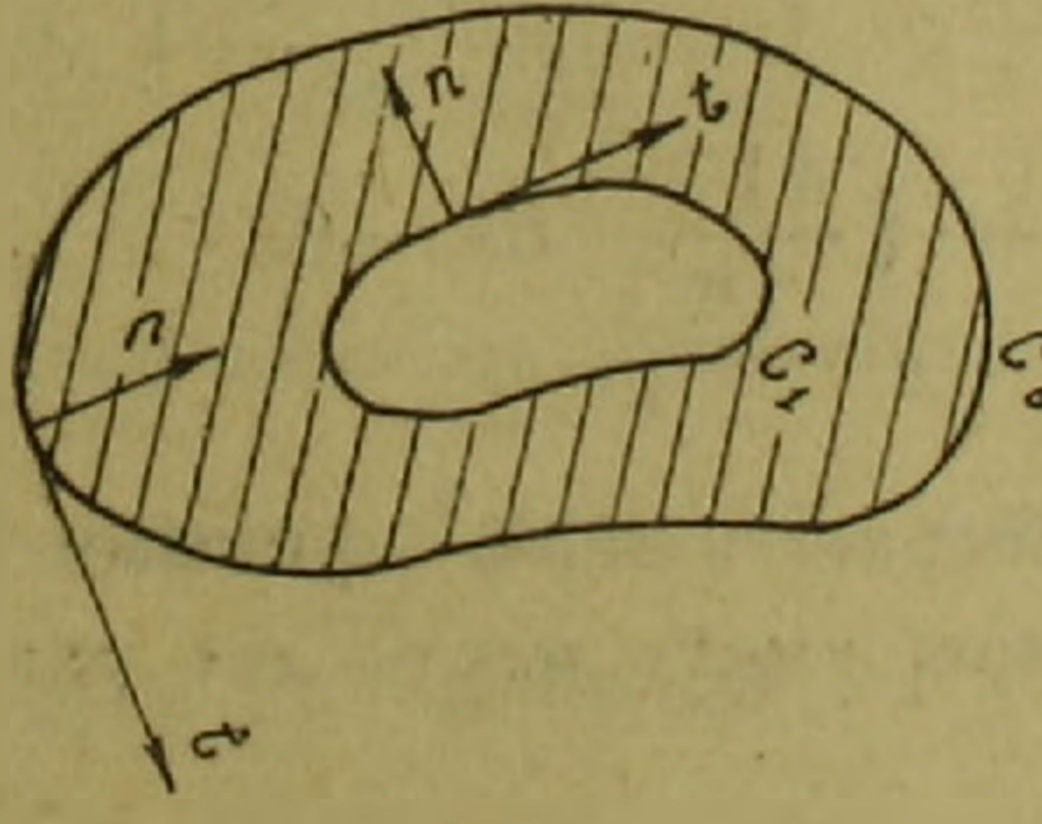
К задаче о кручении стержня

(Представлено 2 II 1949)

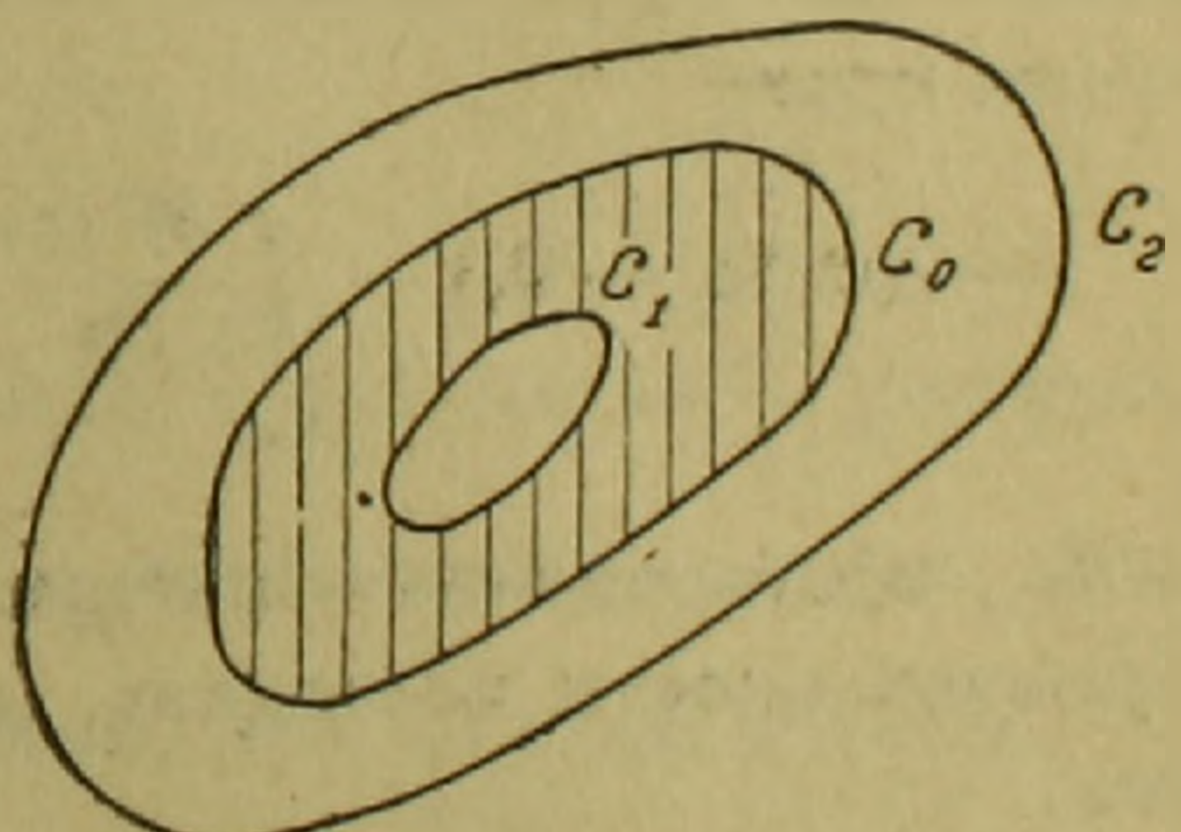
Для иллюстрации теории контурных производных, изложенной в [1], рассмотрим задачу о кручении стержня постоянного сечения, т. е. следующие исходные данные:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 F = -2\mu\tau, \\ &X_z = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Y_z = -\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Рассмотрим для простоты, без ущерба для общности, некоторую двусвязную область, ограниченную кривыми C_0 и C_1 (фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Будем решать задачу (1) как для бесконечной области. Тогда замечая, что поскольку компоненты напряжения вне области D_0, ограниченной C_0 и в области D_1, ограниченной C_1, равны нулю, то вне D_0, должно быть $F(x, y) = F_0$, а в D_1, $F(x, y) = F_1$, где F_0 и F_1 некоторые постоянные. Таким образом во всей бесконечной области $F(x, y)$ не претерпевает разрыва. При пересечении же кривых C_0 и C_1 вдоль нормали, нормальные производные претерпевают скачки, равные по величине $\dfrac{\partial F(s)}{\partial n}$.

Обращаясь к уравнению (1), замечаем, что следует положить вне D_0 и в D_1 величину $2\mu\tau = 0$, а в области $D_0 - D_1$ принять $-2\mu\tau$.

Пользуясь понятием о двумерном разрывном множителе

$$\Gamma(C) = \begin{cases} 1 \text{ в } D, \\ 0 \text{ вне } D, \end{cases}$$

правую часть уравнения (1) запишем как

$$-2\mu\tau\,[\Gamma(C_0)-\Gamma(C_1)].$$

Выражая теперь (1) в контурных производных и имея ввиду, что имеют место скачки только нормальных производных, мы получим окончательное диференциальное уравнение для рассматриваемой двусвязной области

$$\nabla^2[F] = \frac{\partial^2[F]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[F]}{\partial y^2} = -2\mu\tau\,[\Gamma(C_0)-\Gamma(C_1)]$$

$$+\overset{(1)}{\Gamma}(C_0)\frac{\partial F(s)}{\partial n} + \overset{(1)}{\Gamma}(C_1)\frac{\partial F(s)}{\partial n}, \qquad (2)$$

где $\overset{(1)}{\Gamma}(C_0)$ и $\overset{(1)}{\Gamma}(C_1)$ единичные линейно распределенные импульсивные функции первого порядка вдоль C_0 и C_1, являющиеся символическими обозначениями соответствующих простых слоев.

На основании ([1]) имеем, что

$$\iint_{\infty} \nabla^2[F]\,dx\,dy = 0.$$

Взяв двойной интеграл по всей бесконечной области от правой части (2), получим сразу

$$-2\mu\tau(\Omega_0-\Omega_1) + \int_{C_0}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\,ds + \int_{C_1}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\,ds = 0,$$

где Ω_0 и Ω_1, соответственно площади, ограниченные кривыми C_0 и C_1. Ввиду произвольности последних, должны иметь место два раздельных равенства:

$$2\mu\tau\,\Omega_0 = \int_{C_0}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\,ds,$$

$$2\mu\tau\,\Omega_1 = -\int_{C_1}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\,ds,$$

что является содержанием известной теоремы Бредта, распространенной и на внешний контур.

Уравнение (2) можно преобразовать к следующему виду:

$$F(x,y) = \frac{\mu\tau}{\pi}\iint_{\infty}[\Gamma(C_0)-\Gamma(C_1)]\;\lg r\,d\xi\,d\eta \qquad (3)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\lg r\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}\frac{\partial F(s)}{\partial n}\lg r\,ds,$$

где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

Нам представляется интересной также следующая постановка задачи.

Пусть задана область D_2, ограниченная кривой C_2 и включающая в себе область D_0 (фиг. 2).

Пусть для области D_2 известна функция Грина

$$K(x-\xi,\,y-\eta).$$

Тогда для нашей двусвязной области имеет место:

$$F(x,y)=-2\mu\tau\int\limits_{D_0}\int\limits_{\subset D_2}[\Gamma(C_0)-\Gamma(C_1)]\;K(x-\xi,\,y-\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$+\int\limits_{C_0}\frac{\partial F(s)}{\partial n}K(x-\xi_s,\,y-\eta_s)\,ds+\int\limits_{C_1}\frac{\partial F(s)}{\partial n}K(x-\xi_s,\,y-\eta_s)\,ds. \tag{4}$$

В частности, если C_0 совмещается с C_2, то

$$F(x,y)=-2\mu\tau\iint\limits_{D_0}[1-\Gamma(C_1)]\,K(x-\xi,\,y-\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$+\int\limits_{C_1}\frac{\partial F(s)}{\partial n}K(x-\xi_s,\,y-\eta_s)\,ds, \tag{5}$$

поскольку влияние краевых значений $\frac{\partial F(s)}{\partial n}$ вдоль C_0 уже учтено структурой функции Грина. Эта формула справедлива и в том случае, если часть дуги C_1 совмещается с C_0, ясно, что на этом участке $\frac{\partial F(s)}{\partial n}=0$.

Соответствующее же диференциальное уравнение примет вид:

$$\nabla^2[F]=-2\mu\tau\left(1-\Gamma(C_1)\right)+\overset{(1)}{\Gamma}(C_1)\,\frac{\partial F(s)}{\partial n},$$

которое справедливо уже только для области D_0.

Рассмотренные выше уравнения можно привести к интегральным. Для этой цели достаточно $\frac{\partial F(s)}{\partial n}$ выразить через $\frac{\partial F(s)}{\partial x}$ или $\frac{\partial F(s)}{\partial y}$, поскольку $\frac{\partial F(s)}{\partial s}=0$ и продиференцировать по x или y любое из уравнений (3), (4) или (5).

Тогда, например, (5) примет вид:

$$F(x, y) = -2\mu\tau \iint\limits_{D_0} [1 - \Gamma(C_1)]\, K(x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$+ \int\limits_{C_1} \frac{\partial F(s)}{\partial x} \frac{1}{\cos(n, x)} K(x - \xi_s, y - \eta_s)\, ds.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -2\mu\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{D_0} [1 - \Gamma(C_1)]\, K(x - \xi, y - \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$+ \int\limits_{C_1} \frac{\partial F(\xi_s, \eta_s)}{\partial x} \frac{1}{\cos(n, x)} \frac{\partial K(x - \xi_s, y - \eta_s)}{\partial x}\, ds,$$

где

$$\frac{1}{\cos(n, x)} \frac{\partial K(x - \xi_s, y - \eta_s)}{\partial x}$$

является уже ядром интегрального уравнения для области D_0. Аналогичные интегральные уравнения можно составить для определения ядра преобразованной области, если известно ядро основной области. Не исключена возможность получения конкретных результатов помощью рассмотренных уравнений для решения задач о кручении стержней.

Ереванский Политехнический
институт им. К. Маркса
Ереван, 1949, февраль.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Ձողերի ոլորման խնդրի մասին

Այստեղ տրված են հաստատուն կտրվածք ունեցող գլանային ձողերի ծռման խնդրի հիմնական հավասարումները, որոնք ստացվել են կոնտուրային ածանցյալների տեսության հիման վրա։

Այդ հավասարումները բերված են կոնտուրային ածանցյալներով գրված դիֆերենցիալ և ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների ձևերով։

Որպես հիմնական հավասարումների անմիջական արդյունք ստացվել է Բրեդտի հայտնի թեորեմը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *А. Г. Назаров.* ДАН Армянской ССР, **7**, № 4, 1947.