

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян

Об интегрировании аналитических функций в областях
комплексного переменного

(Представлено А. Л. Шагиняном 28 III 1949)

Пусть D представляет какую-либо односвязную конечную область в плоскости комплексного переменного z , а $f(z)$ — функция, аналитическая в D и непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$.

В случае, когда граница Γ области D — спрямляемая кривая, неопределенный интеграл от функции $f(z)$ является функцией так же, как и $f(z)$ непрерывной в $\bar{D}$.

Ниже мы имеем в виду показать, что если рассматривать области с неспрямляемой границей, то может представиться случай, когда

$F(z) = \int_a^z f(t) dt$ ($a \in D$) разрывная и неограниченная в D функция, т. е.,

вообще говоря, интегрирование некоторой аналитической функции $f(z)$ может привести к функции худшей, нежели сама $f(z)$.

Теорема 1. Существует жорданова область D и аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ функция $f(z)$, так, что $F(z)$ стремится к $+\infty$ при приближении z по произвольному пути к любой точке некоторого всюду плотного на границе Γ множества $E \in \Gamma$.

Замечание. Какова бы ни была область D , всегда очевидно существует всюду плотное на границе D множество точек, достижимых изнутри спрямляемыми кривыми, так, что для любой D существует плотное на Γ множество граничных точек, при приближении к которым по любым путям $F(z)$ стремится к определенным конечным пределам.

Доказательство теоремы. Пусть $\{k_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) — некоторая последовательность целых чисел, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \rightarrow 0$, $y_1 > y_2 > \dots > y_n \rightarrow 0$ — две последовательности чисел.

Положим

$$x^{(n)} = \frac{1}{2^n} + \frac{i}{2k_n} \frac{1}{2^n},$$

под $[z_1; z_2]$ будем понимать отрезок в плоскости z с концами в точках z_1, z_2 .

Обозначим

$$l_n = \sum_{p=1}^{k_n-1} [x_{2p}^{(n)} + i\alpha_n; x_{2p+1}^{(n)} + i\alpha_n] + \sum_{p=1}^{2k_n} [x_p^{(n)} + i\alpha_n; x_p^{(n)} - i\alpha_n] + \\ + \sum_{p=1}^{k_n} [x_{2p-1}^{(n)} - i\alpha_n; x_{2p}^{(n)} - i\alpha_n] + \left[2^{-n} + i\alpha_n; 2^{-n} + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_{n-1}} 2^{-n+1} + i\alpha_{n-1} \right]$$

(при $n=1$ в состав l_1 последний член не входит). Точку $z=0$ вместе со всеми l_n обозначим через l .

Очевидно, l представляет жорданову кривую, имеющую $z=0$ одним из своих концов.

Непрерывную функцию $\varphi(z)$ определим на кривой l следующим образом:

$$\varphi(z) = y_n \quad \text{при} \quad z \in [x_{2p}^{(n)} + i\alpha_n; x_{2p+1}^{(n)} + i\alpha_n] \\ p = 1, 2, \dots, k_n$$

$$\varphi(z) = -y_n \quad \text{при} \quad z \in [x_{2p-1}^{(n)} + i\alpha_n; x_{2p}^{(n)} - i\alpha_n]$$

$$\varphi(0) = 0$$

На остальных отрезках кривой l функцию $\varphi(z)$ определяем линейной интерполяцией по ее известным значениям на концах отрезков.

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n \rightarrow 0$ — некоторая последовательность чисел. Через d_n обозначим множество точек, отстоящих от l_n на расстояние, меньшее ε_n .

В силу того, что $\varphi(z)$ непрерывна на l_1 , можно найти полином $P_1(z)$, приближающий $\varphi(z)$ на l_1 достаточно хорошо:

$$\max_{z \in l_1} |P_1(z) - \varphi(z)| < \eta_1,$$

где $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_n \rightarrow 0$ — некоторая последовательность чисел. ε_1 выберем настолько малым, чтобы

$$\max_{z \in \bar{d}_1} |P_1(z)| < y_1 + 2\eta_1.$$

Через z_n обозначим точку пересечения границы области d_n с l_{n+1} . Число ε_1 можно выбрать, кроме того, настолько малым, чтобы

$$|P_1(z_1) - \varphi(z_1)| < 2\eta_1.$$

Часть l_{n+1} , расположенную вне d_n , обозначим l'_{n+1} .

Лемма. Пусть B — некоторая жорданова область, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ — жордановы дуги, без общих точек, каждая из которых

имеет с замыканием $\bar{B}$ не более одной общей точки, а $\mu(z)$ — функция, определенная в B и λ_i , аналитическая в B и непрерывная на сумме $\bar{B} + \sum_{i=1}^q \lambda_i$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется полином $\Pi(z)$, удовлетворяющий неравенству

$$\max_{z \in \bar{B} + \sum_{i=1}^q \lambda_i} |\Pi(z) - \mu(z)| < \varepsilon.$$

Действительно, в силу теоремы Уолша для любого $i \leq q$ можем подыскать полином $\Pi_i(z)$, так, чтобы

$$\max_{z \in \lambda_i} |\Pi_i(z) - \mu(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а также полином $\Pi_0(z)$, для которого

$$\max_{z \in \bar{B}} |\Pi_0(z) - \mu(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждую из дуг λ_i покроем жордановой областью B_i , граница которой проходит через общую точку w_i дуги λ_i с границей B ; все остальные точки λ_i расположены строго внутри B_i .

Области B_i можно выбрать таким образом, чтобы их границы попарно не пересекались и имели с границей B по одной общей точке w_i . Полиномы

$$\Pi_i(z) = \Pi_i(w_i) + \Pi_0(w_i),$$

а также $\Pi_0(z)$ принимают в общих граничных точках областей B_i с B равные значения, поэтому, в силу одной теоремы Шагиняна, можно найти полином $\Pi(z)$, приближающий с любой степенью точности в $\bar{B} - \Pi_0(z)$, а в $B_i - \Pi_i(z)$.

Применим лемму к области d_1 кривой l_2' и функциям $P_1(z) = P_1(z_1) + \varphi(z_1)$ (в d_1) и $\varphi(z)$ (на l_2'). В силу леммы, найдется полином $P_2(z)$, для которого выполняются неравенства

$$1. \max_{z \in l_2'} |P_2(z) - \varphi(z)| < \eta_2, \quad 2. \max_{z \in d_1} |P_2(z) - P_1(z) + P_1(z_1) - \varphi(z_1)| < \eta_2.$$

Число ε_2 выбираем так, чтобы

$$\max_{z \in d_2} |P_2(z)| < y_2 + 2\eta_2.$$

Обозначим $d_1 + d_2 = D_2$. Допустим, что область D_n и полином $P_n(z)$ уже построены так, что

$$1. \max_{z \in \bar{D}_{n-1}} |P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \eta_{n-1}$$

$$2. \max_{z \in I'_n} |P_n(z) - \varphi(z)| < \eta_n$$

$$3. \max_{z \in \bar{D}_n - D_{n-1}} |P_n(z)| < Y_n + 2\eta_n$$

Определим D_{n+1} и $P_{n+1}(z)$. В силу леммы можно найти полином $P_{n+1}(z)$, удовлетворяющий неравенствам

$$1. \max_{z \in \bar{D}_n} |P_{n+1}(z) - P_n(z)| < \eta_n$$

$$2. \max_{z \in I'_{n+1}} |P_{n+1}(z) - \varphi(z)| < \eta_{n+1}$$

Число ε_{n+1} выбираем так, чтобы $\max_{z \in \bar{D}_{n+1} - D_n} |P_{n+1}(z)| < y_{n+1} + 2\eta_{n+1}$ и полагаем $D_{n+1} = D_n + d_{n+1}$

Таким образом, области D_n и полиномы $P_n(z)$ определены для любого

$$n = 1, 2, 3, \dots. \text{ Положим } D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n$$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z); f(0) = 0;$$

легко видеть, что область D жорданова, граница ее проходит через

$z = 0$, а $f(z)$ — функция непрерывная в $\bar{D}$, так как ряд $P_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(z) -$

$- P_n(z)]$ при условии $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty$ равномерно сходится в любой из D

и его сумма, определенная таким образом везде вне $z = 0$, стремится к нулю при $z \rightarrow 0$. Легко видеть, что соответствующим подбором чисел

$$\{k_n\}, \{\eta_n\}, \{\varepsilon_n\}, \{y_n\}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

можно добиться того, чтобы $\int_a^z f(t) dt \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow 0, z \in \bar{D}$;

для этого достаточно рассматривать значения z на кривой l и за путь интегрирования принять часть l от a до z . Для завершения доказательства применяем метод сгущения особенностей.

Так как построенная функция $f(z)$ непрерывна, то ее можно равномерно аппроксимировать в $\bar{D}$ полиномами, откуда, используя полученное свойство $f(z)$, имеем.

Следствие. Существует последовательность полиномов $\{Q_n(z)\}$ такая, что

$$\max_{z \in \bar{D}} |Q_n(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

однако

$$\max_{z \in \bar{D}} \left| \int_a^z Q_n(t) dt \right| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Пусть D — конечная область со связным дополнением, d — ее диаметр, $P_n(z)$ — полином степени n . Если

$$(*) \quad \max_{z \in \bar{D}} |P_n(z)| \leq M,$$

то, при любом $\varepsilon > 0$,

$$\max_{z \in \bar{D}} \left| \int_a^z P_n(t) dt \right| < \pi \varepsilon d M n (1 + \varepsilon), \quad n > n(\varepsilon).$$

Действительно, если L_ε — образ окружности $|w| = 1 + \varepsilon$ при конформном отображении $|w| > 1$ на дополнение к $\bar{D}$, осуществляемом с помощью функции $z = \psi(w)$, то, используя оценку модуля производной однолистной функции, получаем

$$\text{дл. } L_\varepsilon < \frac{d}{\varepsilon} 2\pi(1 + \varepsilon).$$

Легко видеть, что в области D_ε , ограниченной кривой L_ε две любые точки могут быть соединены спрямляемой кривой, лежащей в D_ε и по длине не превышающей $\frac{\pi d}{\varepsilon} (1 + \varepsilon)$.

Как известно, при условии $(*)$ имеем

$$\max_{z \in D_\varepsilon} |P_n(z)| < M(1 + \varepsilon)^n;$$

пусть $\varepsilon = \frac{1}{n}$; тогда имеем

$$\left| \int_a^z P_n(t) dt \right| < M \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \pi d n \left(1 + \frac{1}{n} \right) < M \pi e d n (1 + \varepsilon),$$

где путь интегрирования расположен в $D_{\frac{1}{n}}$.

Таким образом, для того, чтобы у непрерывной в $\bar{D}$ функции $f(z)$ неопределенный интеграл был бы также непрерывным в $\bar{D}$, необходимо накладывать некоторые дополнительные ограничения на $f(z)$, как, например, следующее.

Теорема 3. Пусть $E_n(f)$ означает отклонение от $f(z)$ полинома наилучшего приближения $f(z)$ в $\bar{D}$ степени n .

Если

$$E_n(f) < \frac{\text{Const}}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то функция

$$F(z) = \int_a^z f(t) dt$$

непрерывна в $\bar{D}$.

В самом деле, при этих условиях из теоремы 2 следует, что ряд

$$\int_a^z P_1 dt + \sum \left[\int_a^z P_{n+1}(t) dt - \int_a^z P_n(t) dt \right],$$

представляющий в D $F(z)$, равномерно и абсолютно сходится в $\bar{D}$, т. е. $F(z)$ непрерывна в $\bar{D}$.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, февраль.

Ս. Մ. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Կոմպլեքս տիրույթներում անալիտիկ ճունկցիաների ինտեգրման մասին

Ներկա հոդվածում ցույց է տրված, որ անալիտիկ և փակ տիրույթում անընդհատ ֆունկցիաների ինտեգրումից կարող են ստացվել խզվող և անսահմանափակ ֆունկցիաներ—մի փաստ, որը շունի իր հանգույնը իրական փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում:

Կնահատելով բաղմանդամի ինտեգրալի մաքսիմում մոդուլը նրա տիրույթի եզրագծի վրա տված մաքսիմում մոդուլի օգնությամբ, ստացվում է անորոշ ինտեգրալի փակ տիրույթում անընդհատության հետևյալ պայմանը.—

Եթե $E_n(f)$ -ը լավագույն մոտարկող n -րդ աստիճանի բաղմանդամի շեղումն է $f(z)$

ֆունկցիայից փակ D տիրույթում և $E_n(f) < \frac{\text{Const}}{n^{1+\varepsilon}}$, ապա $\int_{z_0}^z f(t) dt$ ինտեգրալը անընդ-

հատ է փակ D տիրույթում: