ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 3

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян, действ. чл. АН Армянской ССР

Об одной задаче теории квази-аналитических функций

(Представлено 21 III 1949)

Рассмотрим класс непрерывных и неограниченно диференцируемых на вещественной оси функций $\{ f(x) \}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{(n)}(x) \right|^2 dx \leqslant B^n A_n \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

где $\{ A_n \}$ некоторая фиксированная последовательность чисел, а B может меняться при переходе от одной функции к другой.

При выполнении дополнительного условия

$$\int_0^{\infty} \lg\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{A_k^2} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \infty \tag{2}$$

совокупность функций $\{f(x)\}$ составляет некоторый квази-аналитический класс C_A [ср. ([1]), стр. 14—21]. Это значит, что каждая функция из класса C_A вполне определяется ее значением и значениями всех производных в одной точке.

Или, что одно и тоже, если $f(z) \in C_A$ и

$$f^{(n)}(\alpha) = 0, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

в некоторой точке α, то

$$f(z) \equiv 0.$$

В настоящей заметке мы ставим задачу о выявлении нового типа признаков квази-аналитичности. А именно, в каком случае из условий

$$f^{(n_k)}(\alpha) = 0 \qquad k = 0,1,2,\dots$$

и

$$f^{(n)}(\beta) = 0, \qquad n \neq n_k$$

следует в определенном классе функций тождественное обращение функции в нуль, и, если это необходимо, то при каком минимальном расстоянии точек α и β это будет иметь место.

Мы приводим решение этой задачи в частном случае, когда n_k четные числа.

Теорема I. Если $f(z)$ *принадлежит классу* C_A *и*

$$\begin{aligned} &\overset{(2k)}{f}(\alpha) = 0, \qquad k = 0,1,2,\dots \\ &\overset{(2k+1)}{f}(\beta) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

то $$f(z) \equiv 0$$

при любых α *и* β.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$2\varphi(x) = f(\alpha + x) + f(\alpha - x) + f(\beta + x) - f(\beta - x).$$

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(2k)}{\varphi}(0) &= \overset{(2k)}{f}(\alpha) \\ \overset{(2k+1)}{\varphi}(0) &= \overset{(2k+1)}{f}(\beta) \end{aligned}\right\} \quad k = 0,1,2$$

согласно (3)

$$\overset{(n)}{\varphi}(0) = 0 \qquad n = 0,1,2,\dots$$

и так как очевидно $\varphi(x)$ одновременно с $f(x)$ принадлежит C_A, то

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

Из $\varphi(x) \equiv 0$ и $\varphi(-x) \equiv 0$

следует

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 0 \\ f(\beta + x) - f(\beta - x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Соотношения (4) показывают, что $f(x)$ нечетная относительно точки α и четная относительно точки β, а отсюда следует периодичность $f(x)$ с периодом $2\,|\,\beta-\alpha.\,|$

Если бы $f(x) \not\equiv 0$, то при периодичности $f(x)$ имели бы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \infty,$$

что противоречит одному из условий (1).

Рассмотрим теперь ту же самую задачу для класса C'_A функций, удовлетворяющих условиям

$$\left|\overset{(n)}{f}(x)\right| < B^n . A_n \qquad n = 1,2,\dots \tag{5}$$

$-\infty < x < \infty$, и условию (2) Карлемана.

Теорема II. Если $f(x) \in C'_A$ *и*

$$\overset{(2k)}{f}(\alpha) = \overset{(2k+1)}{f}(\beta) = 0$$

$$k = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

то $f(x)$ *периодическая с периодом* $2\,|\,\beta-\alpha\,|$, *причем в каждом промежутке с длиной больше* $2\,|\,\beta-\alpha\,|$ *содержится по крайней мере один нуль функции.*

Если дополнительно

$$|\,\beta-\alpha\,| < \frac{M_0}{M_1}, \qquad (7)$$

то $f(x) \equiv 0$. Здесь

$$M_0 = \sup\,|\,f(x)\,|\,,$$
$$M_1 = \sup\,|\,f(x)\,|$$
$$-\infty < x < \infty.$$

В этом случае для того, чтобы $f(x) \equiv 0$, дополнительное условие типа (7) необходимо, так как $\sin x$ удовлетворяет (6) при $\alpha = 0$, $= \frac{\pi}{2}$, принадлежит C'_A и для нее нарушается (7).

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается так же, как это было сделано в теореме I. Для доказательства второй части обозначим через x_0 одну из точек, где периодическая функция $|\,f(x)\,|$ достигает максимума. Согласно предыдущему, на расстоянии не больше $|\,\beta-\alpha\,|$ от x_0 будет некоторый нуль η этой функции, поэтому, если $f(x) \not\equiv 0$

$$f(x_0) = \int_{\eta}^{x_0} f'(t)\,dt$$

$$|\,f(x_0)\,| = M_0 \leq \int_{\eta}^{x_0} |\,f'(t)\,|\,|\,dt\,|,$$

т. е. $M_0 \leq |\,\beta-\alpha\,| \cdot M_1$, но по условию $|\,\beta-\alpha\,| < \frac{M_0}{M_1}$.

Полученное противоречие доказывает, что $f(x) \equiv 0$.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1949, март.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Քվազի-անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մի թեորեմի մասին

Ներկա հոդվածում մենք քննում ենք քվազի-անալիտիկության մի նոր տիպի հայտանիշ։ Ապացուցում ենք, որ եթե անվերջ թվային առանցքի վրա Ն. Վիների կողմից սահմանված ֆունկցիաների դասի որևէ ֆունկցիայի զույգ ածանցյալները դառնում են զերո մի կետում, իսկ կենտ ածանցյալները մի այլ կետում, ապա այդ ֆունկցիան նույնաբար զերո է։ Իսկ նույն պայմանների դեպքում, եթե ֆունկցիան պատկանում է Դանժուա-Կառլեմանի դասին, ապա նույնաբար զերո կդառնա, եթե միայն վերը նշված զերոները բավականաչափ մոտ են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *R. E. A. C. Paley* and *N. Wiener*. Fourier Transforms in the complex Domain. (American Mathematical Society Colloquium Publications, **19**. 1934).