ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 2

ФИЗИКА

Г. А. Гурзадян

Диффузия мгновенного излучения

(Представлено В. А. Амбарцумяном 10 XII 1948)

В некоторых задачах теоретической астрофизики, в частности,—при исследовании поля излучения в среде межзвездного водорода, когда источники излучения (звезды) имеют некоторую скорость движения относительно этой среды, приходится рассматривать диффузию световых квантов, испущенных за очень короткий промежуток времени, практически мгновенно. Практический интерес представляет исследование диффузии мгновенно излученных L_α-квантов (первая линия Лаймановой серии водорода) в среде разреженного водорода.

Пусть имеем водородную среду, которая однородна, изотропна и неограниченна по всем направлениям. Пусть в этой среде в один момент в некотором объеме, мгновенно, испускаются L_α-кванты с определенной интенсивностью. Задача заключается в следующем: определить закон распределения этой энергии как функции времени и пространственных координат. Поле этого излучения мы будем называть полем мгновенно излучающего источника.

Своеобразность задачи заключается в том, что в этом случае стационарность распределения атомов между энергетическими уровнями нарушается. Выражаясь математически, это означает:

$$n_i \sum_{k=1}^{i-1} (A_{ik} + B_{ik} \rho_{ik}) + n_i B_{ic} \rho_{ic} \neq n_k \sum_{k=i+1}^{\infty} (A_{ki} + B_{ki} \rho_{ki}) + n^+ n_e C_i (T_e), \qquad (1)$$

где введены обычные обозначения.

При этом понятно, что разность между правой и левой частью неравенства (1) должна быть равна изменению числа атомов в единицу времени, т. е. зависеть от нестационарности. Но можно показать, что для теории диффузии L_α-квантов при определенных условиях роль этой разности совершенно незначительна, и, следовательно, ее можно отбросить. Это возможно тогда, когда интервал времени между последовательными поглощениями какого либо L_α-кванта будет много больше, чем время жизни атома в возбужденном состоянии, т. е. продолжительность акта рассеяния. Если обозначить коэфициент поглощения на один водородный атом в 1 *см*^{3} в линии L_α-излучения через k, то среднее число поглощений, претерпеваемое квантом в единицу времени, будет kn_0c, где n_0 есть число водородных атомов в единицу объема, c—скорость света. Тогда средний промежуток времени между двумя последовательными поглощениями будет

$$t = \frac{1}{kn_0c}. \tag{2}$$

С другой стороны, продолжительность жизни атома в возбужденном состоянии порядка 10^{-8} сек ([1]). Сравнивая это с (2) и принимая $k \sim 10^{-13}$ см$^{-2}$, $c = 3.10^{10}$ см/сек, получим, что при условии

$$n_0 \ll 10^{10} \text{ см}^{-3} \tag{3}$$

член нестационарности в условии лучевого равновесия можно отбросить. А это условие в самом деле имеет место в межзвездном пространстве, где среднее количество водородных атомов порядка $n_0 = 3$ см$^{-3}$ ([2]).

При наличии условия (3) можно сказать, что условие монохроматического лучевого равновесия соблюдается, т. е. в каждый момент столько же излучается единицей объема, сколько поглощается.

При этом, однако, время играет заметную роль в процессе переноса энергии, так как скорость света, т. е. скорость происходящих процессов диффузии квантов не может быть здесь принята равной бесконечности.

Таким образом, учитывая нестационарность в уравнении переноса, мы можем принять вместе с тем обычное условие лучевого равновесия, т. е. считать состояние возбуждения квазистационарным. Иными словами, мы можем написать условие лучевого равновесия в виде обычного условия рассеяния

$$B_\alpha(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int I_\alpha(t, x, y, z)\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\cdot J_\alpha(t, x, y, z), \tag{4}$$

а уравнение переноса в виде

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial I_\alpha(t, x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial I_\alpha(t, x, y, z)}{\partial s} = \alpha_\alpha\left[B_\alpha(t, x, y, z) - I_\alpha(t, x, y, z)\right], \tag{5}$$

где I_α —интенсивность L_α-излучения в точке (x, y, z) и по направлению θ и φ;

J_α —средняя интенсивность в точке (x, y, z);

B_α —функция излучения, представляющая отношение коэфициента излучения к коэфициенту поглощения.

Все эти величины являются функциями от времени и координат x, y, z.

α_α — коэфициент поглощения отнесенный к единице объема, который мы можем принять постоянным, поскольку ионизация по самой постановке задачи отсутствует; почти все атомы находятся в нейтральном состоянии, и, следовательно, изменения коэфициента поглощения в линии незначительны.

Система уравнений (4) и (5) определяет нашу задачу. Напишем уравнения (5) в декартовых координатах

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\alpha}{\partial t}+\cos\alpha\frac{\partial I_\alpha}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial I_\alpha}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial I_\alpha}{\partial z}=\alpha_\alpha(B_\alpha-I_\alpha). \quad (6)$$

Умножая (6) сперва на $d\omega$, а потом на $\cos\alpha\, d\omega$, $\cos\beta\, d\omega$, $\cos\gamma\, d\omega$ и интегрируя каждый раз по всем направлениям, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial J_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=\alpha_\alpha(4\pi B_\alpha-J_\alpha)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}+\frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\int I_\alpha\cos\alpha\cos\beta\, d\omega+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\int I_\alpha\cos\alpha\cos\gamma\, d\omega=-\alpha_\alpha H_x$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int I_\alpha\cos\beta\cos\alpha\, d\omega+\frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial y}+ \quad (7)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\int I_\alpha\cos\beta\cos\gamma\, d\omega=-\alpha_\alpha H_y$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int I_\alpha\cos\gamma\cos\beta\, d\omega+\frac{\partial}{\partial y}\int I_\alpha\cos\gamma\cos\beta\, d\omega+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial z}=-\alpha_\alpha H_z\,.$$

Здесь выведено приближение Эддингтона $\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma=\frac{1}{3}$.

Через H_x, H_y, H_z обозначены

$$H_x=\int I_\alpha\cos\alpha\, d\omega;\ H_y=\int I_\alpha\cos\beta\, d\omega;\ H_z=\int I_\alpha\cos\gamma\, d\omega.$$

Чтобы выяснить характер интегралов, входящих в систему (7), вводим сферическую координатную систему. Ось x направим так, чтобы получить $\alpha=\psi$. Тогда имеем, например,

$$\int I_\alpha\cos\gamma\cos\beta\, d\omega=\iint I_\alpha\cos\varphi\sin^3\psi\,\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\, d\psi\int_0^{2\pi} I_\alpha\sin 2\varphi\, d\varphi. \quad (8)$$

Поскольку I_α — симметрично относительно φ, то мы можем принимать, что $\int\limits_0^{2\pi} I_\alpha \sin 2\varphi \, d\varphi = 0$. Аналогичным путем найдем, что все интегралы, входящие в систему (7), равны нулю. Тогда система (7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial J_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial x} = -\alpha_\alpha H_x \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial y} = -\alpha_\alpha H_y \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial J_\alpha}{\partial z} = -\alpha_\alpha H_z \,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Взяв производные по t, x, y и z последовательно, получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial z} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t \partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x^2} = -\alpha_\alpha \frac{\partial H_x}{\partial x} \tag{11}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial y^2} = -\alpha_\alpha \frac{\partial H_y}{\partial y} \tag{12}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial z} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial z^2} = -\alpha_\alpha \frac{\partial H_z}{\partial z} \tag{13}$$

Взяв сумму из (11), (12), (13) и имея в виду также уравнение (10), получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial t^2} + \alpha_\alpha \frac{\partial J_\alpha}{\partial t} - \frac{c}{3}\left(\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial z^2}\right) = 0 \,. \tag{14}$$

Предположим, что имеет место следующее условие

$$\frac{1}{ct} \ll \alpha_\alpha \,, \tag{15}$$

где t есть время, в течение которого поле в данной точке успевает существенно изменяться. Тогда, отбрасывая первый член в уравнении (14) в сравнении со вторым, получим:

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial z^2}\right), \tag{16}$$

где

$$a^2 = \frac{c}{3\alpha_\alpha} \,.$$

Если функция $J_\alpha(t, x, y, z)$ зависит только от расстояния, т. е. эта функция не зависит от сферических координат ψ и φ, то оператор Лапласа, входящий в (16), можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial J_\alpha}{\partial r}. \tag{17}$$

Подставляя это в (16), получим

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial J_\alpha}{\partial r}\right), \tag{18}$$

или, вводя новую переменную $\Phi = r \cdot J_\alpha$, получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}. \tag{19}$$

Уравнения (16) и (19) представляют из себя известные диференциальные уравнения классической задачи диффузии, решение которых известно ([3]). Используя это решение в рассматриваемом случае, получаем, для распределения средней интенсивности, как функции от времени и пространственных координат, следующее выражение:

$$J_\alpha(t, x, y, z) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty F(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\, dV, \tag{20}$$

где dV — элемент объема, а

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Выражение (20) есть общее решение проблемы, когда первоначальная функция $F(\xi, \eta, \zeta)$ зависит от расстояния и направления. В нашем случае, т. е. для мгновенного излучающего поля, эта функция имеет сферически симметричную форму; $F(\xi, \eta, \zeta)$ зависит только от расстояния $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Тогда, подставляя в (20) значения r и dV

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi$$

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\psi,$$

получим:

$$J_\alpha(t, R) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} F(\rho)\cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\, \rho^2 \sin^2\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\psi.$$

Производя интегрирование по φ и ψ, получим:

$$J_\alpha(t, R) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}\cdot R}\int_0^\infty F(\rho)\left[e^{-\left(\frac{R-\rho}{2a\sqrt{t}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{R+\rho}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\right]\rho\, d\rho, \tag{21}$$

где R — расстояние, измеряемое от начала координат, или

$$J_\alpha(t, R) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}\,R}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\rho)\cdot e^{-\left(\frac{R-\rho}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\cdot\rho\cdot d\rho \quad . \qquad (22)$$

Это есть выражение для распределения средней интенсивности в трехмерном случае, когда начальное условие обладает сферической симметрией.

Для мгновенного излучения функция $F(\rho)$ равна конечной величине в некотором интервале и равна нулю вне этого интервала. Пусть этот интервал находится в круге $\rho < 1$, где в момент $t = 0$ средняя интенсивность равна, скажем, единице [3]. Это означает, что

$$F(\xi) = 0 \text{ при } |\rho| > 1$$
$$F(\xi) = 1 \text{ при } |\rho| < 1.$$

Вводя новое переменное

$$\xi = \frac{\rho - R}{2a\sqrt{t}}$$

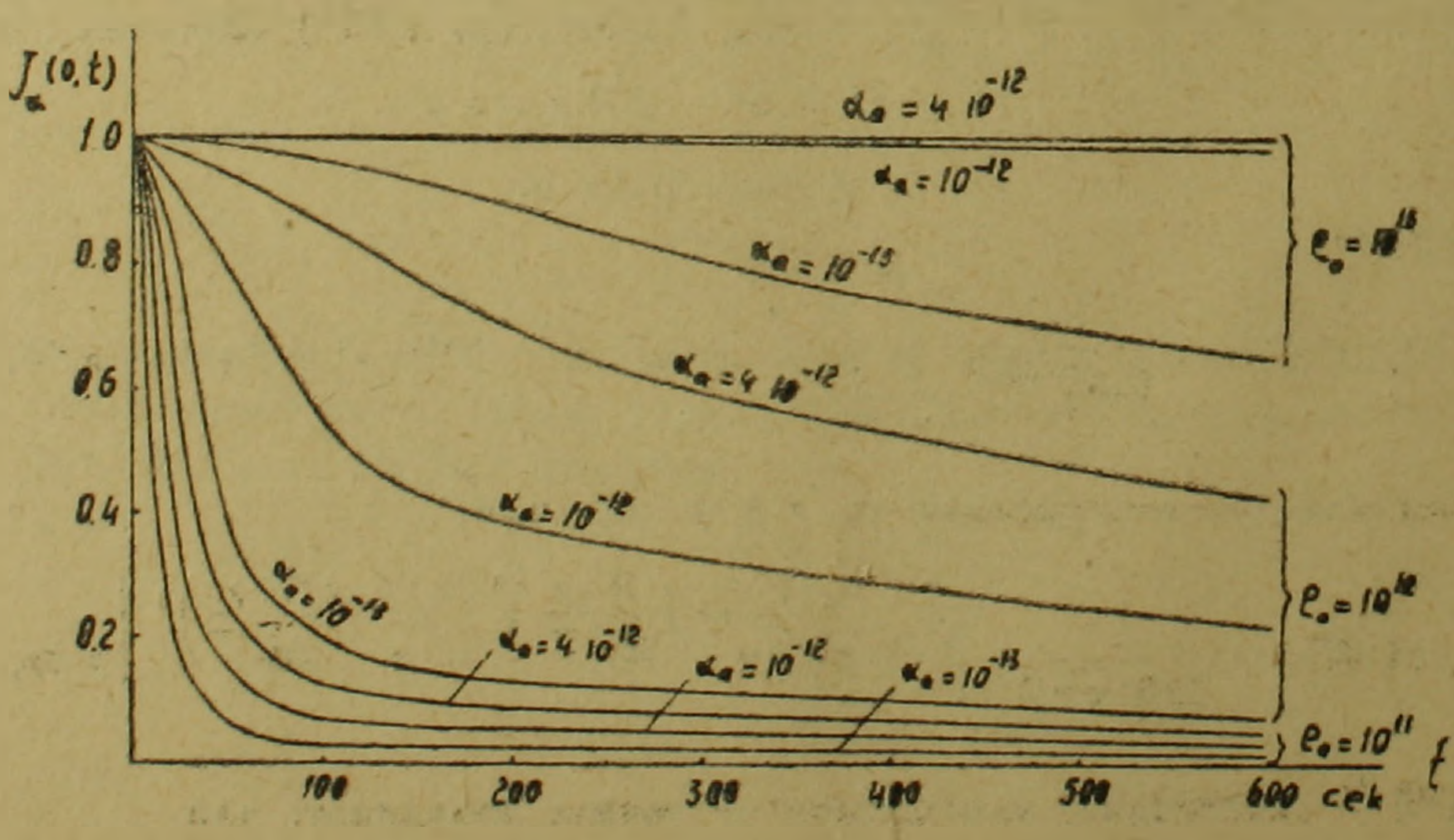
и определяя отсюда пределы интегрирования, получаем для средней интенсивности мгновенного излучения следующее выражение:

$$J_\alpha(t, R) = \frac{1}{2}\left\{\psi\left(\frac{1-R}{2a\sqrt{t}}\right) + \psi\left(\frac{1+R}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{a\sqrt{t}}{R\sqrt{\pi}}\left\{e^{-\left(\frac{1+R}{2a\sqrt{t}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{1-R}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\right\}, \qquad (23)$$

где

$$\psi\left(\frac{1\pm R}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{1\pm R}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2}dx. \qquad (24)$$

Анализ формулы (23) показывает, что чем больше a (т. е. α_a), тем медленнее происходит уменьшение средней интенсивности по вре-



мени. Но функция $J_\alpha(t, R)$ зависит, при чем очень сильно, также и от ρ_0, т. е. от радиуса первоначального объема излучения.

Чтобы иллюстрировать степень уменьшения плотности излучения в зависимости от коэфициента поглощения и радиуса источника излучения, на рисунке приведены кривые средней интенсивности в точке $R = 0$ для различных значений α_α и ρ_0.

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, апрель.

Գ. Ա. ԳՈՒՐԶԱԴՅԱՆ

Ակնթարթային ճառագայթման դիֆֆուզիան

Տեսական աստղաֆիզիկայի որոշ խնդիրներում որոշ կիրառություն կարող է ունենալ հետևյալ ֆիզիկական խնդրի լուծումը.—Դիցուք՝ ունենք մի որոշ գազային միջավայր, որտեղ մի ժամանում, պրակտիկորեն՝ մի ակնթարթում արձակվում են որոշակի հաճախականություն ունեցող և որոշակի քանակությամբ լուսային քվանտներ։ Հարց է առաջանում՝ ինչ օրենքով տեղի կունենա այդ ճառագայթման դիֆֆուզիան՝ ժամանակի և տարածության մեջ։ Այդ խնդիրը լուծված է ջրածնային միջավայրում ակնթարթորեն բաց թողնված Lα-քվանտների համար (ջրածնի Լայմանյան սերիայի առաջին գծին համապատասխանող ճառագայթումը), որպես առավել պրակտիկ հետաքրքրություն ներկայացնող դեպք։ Ստացված է ճառագայթման միջին ինտենսիվության արտահայտությունը որպես ֆունկցիա ժամանակի և ճառագայթման կենտրոնից ունեցած հեռավորության։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *В. Амбарцумян.* Теорет. Астроф., стр. 193, М.—Л., 1939. 2. *B. Strömgren.* Ap. J., 89, 527, 1939. 3. *Ф. Франк* и *Р. Мизес.* Диф. и интегр. ур. мат. физ., стр. 624, М.—Л., 1937.