ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 2

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян

Об интерполяции на множествах

(Представлено А. Л. Шагиняном 2 II 1949)

Настоящая заметка посвящена рассмотрению интерполяции непрерывных функций на совершенных, нигде не плотных множествах при различных предположениях относительно „густоты" этих множеств.

1. В случае интерполяции на отрезке, в силу известной теоремы Фабера, никакая система узлов интерполяции не может гарантировать сходимость интерполяционных полиномов для всех непрерывных на этом отрезке функций. Однако эта теорема перестает быть справедливой, если мы вместо отрезка рассматриваем совершенное, достаточно сильно „разреженное" множество.

Пусть E — совершенное множество, расположенное в отрезке $[0;1]$ и содержащее концы этого отрезка.

Предположим для простоты, что E получается из $[0;1]$ выкидыванием интервала δ_0, концентрического с $[0;1]$, выкидыванием из каждого из оставшихся двух отрезков концентрических с ними интервалов, длины δ_1 и т. д. Таким образом, дополнение к E состоит из 2^n интервалов длины δ_n

$$(\alpha_1^{(n)}, \beta_1^{(n)}), (\alpha_2^{(n)}, \beta_2^{(n)}), \ldots, (\alpha_{2^n}^{(n)}, \beta_{2^n}^{(n)}) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Скорость убывания чисел $\{\delta_i\}$ характеризует, таким образом, в известном смысле, „густоту" множества E.

Через $\omega_f(\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции $f(x)$, определенной и непрерывной на E, $P_n(I_n; f; x)$ означает значение в точке x интерполяционного полинома Лагранжа функции $f(x)$ с узлами в точках

$$I_n: y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}.$$

Теорема 1. Для произвольного совершенного множества E можно указать положительную функцию $\varphi_E(n)$ целочисленного аргумента n, зависящую лишь от геометрических свойств E, и определенную последовательность узлов интерполяции I_n (принадлежа-

щих E), *так, что для любой непрерывной на* E *функции* f(x) *будем иметь*

$$\max_{x \in E} | f(x) - P_n (I_n ; f ; x) | < c\, \omega_f [\varphi_E (n)],$$

где c *не зависит от* n.

Для любого конкретного E *функцию* $\varphi_E(n)$ *можно определить, в частности, если для множеств описанного выше типа (характеризующихся последовательностью* $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ *)*

имеем $\delta_n = \alpha^{n!} - 2\alpha^{(n+1)!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

где $0 < \alpha < 1$, *то при любом* $\beta > \alpha$ $\varphi_E(n) < \beta^{n!}$, $n > n(\beta)$, *так что*

$$\max | f(x) - P_n (I_n ; f; x) | < c\omega_f (\beta^{n!}).$$

Для любой сколь угодно быстро убывающей положительной функции $\varepsilon(n)$ существует совершенное множество E, для которого $\varphi_E(n) < \varepsilon(n)$. Отсюда вытекает, между прочим, возможность произвольно быстрого приближения непрерывных функций полиномами на совершенных множествах, имеющих произвольно плохой модуль непрерывности, если только это множество достаточно сильно разрежено (в частности, если $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta_n$ достаточно быстро сходится к 1)*

Однако, те множества, для которых мы можем установить соотношение $\lim_{n \to \infty} \varphi_E(n) = 0$, имеют меру нуль. Интересно было бы выяснить, существует ли для отрезка [0:1] последовательность узлов интерполяции, для которой интерполяционный процесс сходится для любой непрерывной на [0:1] функции *почти всюду на [0;1].* В противном случае теорему Фабера можно было бы существенно дополнить.

2. Пусть $Q_n(x)$ — полином степени n,

$$\max_{x \in E} | Q_n (x) | = M.$$

Теорема 2. *Если* mes $E > 0$, *то почти всюду на* E *справедлива оценка*

$$| Q_n'(x) | < c M n^{1+\varepsilon}, \quad c = c_\varepsilon (x), \tag{1}$$

где ε — *любое положительное число.*

Рассмотрим случай множеств положительной емкости.

Пусть x_0 — регулярная точка множества E.

Через G(z) обозначим функцию Грина дополнения к E с особенностью на бесконечности. В силу критерия Булигана о регулярности точки

$$\lim_{z \to x_0} G(z) = 0.$$

* О существовании примера подобного множества говорится в (·).

Лемма. Если $|Q_n(x)| \leqslant M, \ x \in E,$ то

$$|Q_n(z)| \leqslant M e^{nG(z)}.$$

Через $\rho(x;\varepsilon)$ обозначим расстояние множества точек, определяемого уравнением $G(z) = \varepsilon > 0$ до точки x.

В этом случае с помощью интеграла Коши легко получить неравенство

$$|Q_n'(x)| \leqslant M \inf_{\varepsilon > 0} \frac{e^{n\varepsilon}}{\rho(x;\varepsilon)}. \tag{2}$$

Отметим, что, в частности, отсюда следует неравенство

$$|Q_n'(x)| \leqslant M(1+\varepsilon)^n, \qquad n > n(\varepsilon) \tag{2'}$$

при любом положительном ε.

В общем случае можно утверждать существование функции $\psi_E(n)$, зависящей лишь от E и n, ограничивающей рост $|Q_n'(x)|$

$$\max_{x \in E} |Q_n'(x)| \leqslant M \psi_E(n). \tag{3}$$

Для определения $\psi_E(n)$ выделим из E бесконечную счетную часть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и представим полином $Q_n(x)$ в виде интерполяционного полинома с узлами в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$; далее оцениваем множители при $Q_n(x_i)$.

Неравенства (1), (2), (3), естественным образом применяются к наилучшим приближениям на совершенных множествах.

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, ноябрь.

Ս. Մ. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ինտերպոլյացիա բազմությունների վրա

Ներկա հոդվածում քննարկված են կատարյալ, ամենուրեք նոսր բազմությունների վրա անընդհատ ֆունկցիաների ինտերպոլյացիայի մի շարք խնդիրներ։

Ապացուցված է, որ երբ բազմությունը բավականաչափ «նոսր» է, Ֆաբերի թեորեմը դադարում է ճշմարիտ լինել, այսինքն՝ կարելի է նշել ինտերպոլյացիոն հանգույցների այնպիսի հաջորդականություն, որն ապահովում է ինտերպոլյացիոն պրոցեսի հավասարաչափ զուգամիտությունը յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիայի համար։

Քննարկված են նաև ինտերպոլյացիոն պրոցեսի զուգամիտության արագության վերաբերյալ քանակական և որակական մի քանի հարցեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *В. Л. Гончаров.* Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1934, 2. *С. Н. Мергелян.* ДАН СССР, **62**, № 2, 1948.