ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 1

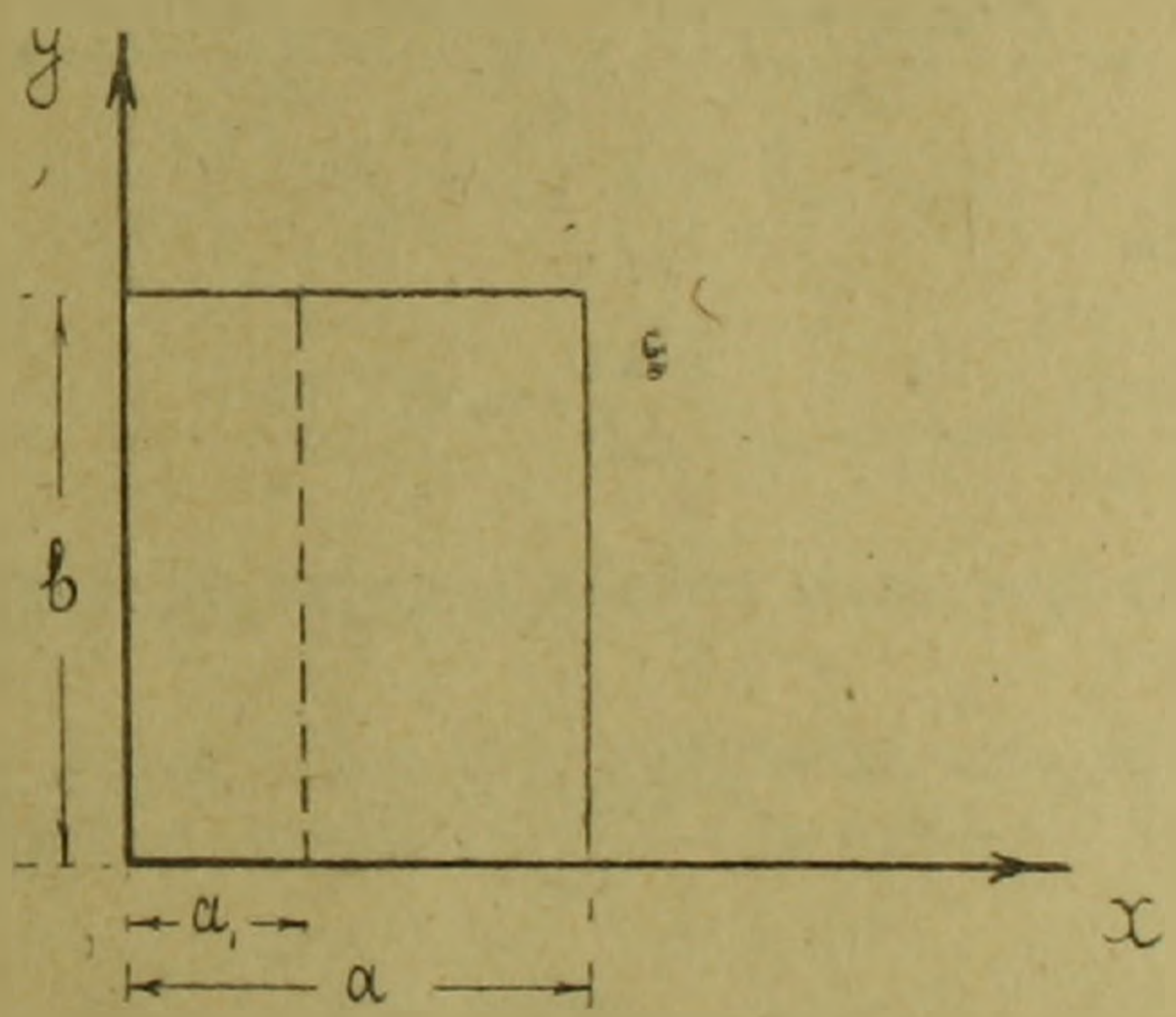
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Прямоугольная плита с шарнирным включением, параллельным одной из сторон

(Представлено 16 XII 1948)

Для иллюстрации метода решения задач математической физики, данного нами в конце ([1]), рассмотрим задачу о плите с шарнирным включением вдоль прямой $x=a_1$.



Диференциальное уравнение

$$D\nabla^4 w = q \tag{1}$$

выразим в контурных производных для учета возмущающего влияния шарнира.

Положим, для общности, что скачки функции $w(x, y)$ и необходимых частных производных на $x=a_1$ равны

$$\frac{\partial^{k+p}}{\partial x^k \partial y^p}[w(a_1+0,y)-w(a_1-0,y)] = \frac{\partial^{k+p}}{\partial x^k \partial y^p}\Delta w(a_1, y),$$

где значения $x=a_1$ подставляются после операций диференцирования.

Тогда (1), выраженное в контурных производных, примет вид:

$$D\nabla^4[w]=q+D\left[\overset{(4)}{\Gamma}(a_1)\Delta w+\overset{(3)}{\Gamma}(a_1)\frac{\partial\Delta w}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\overset{(2)}{\Gamma}(a_1)\left(\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Delta w}{\partial y^2}\right)+\overset{(1)}{\Gamma}(a_1)\left(\frac{\partial^3\Delta w}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3\Delta w}{\partial y\partial x^2}\right)\right] \tag{2}$$

По условию задачи должно быть

$$\Delta w(a_1,\ y)=0 \tag{3}$$

и, стало быть

$$\frac{\partial^{\kappa}\Delta w\ (a_1,y)}{\partial y^{\kappa}}=0. \tag{4}$$

Далее, из условия $M_1=0$ вдоль шарнира, получим:

$$\frac{\partial^2 w(a_1-0,\ y)}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w(a_1-0,\ y)}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 w(a_1+0,\ y)}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w(a_1+0,y)}{\partial y^2}=0.$$

В силу (4) имеем

$$\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x^2}=0. \tag{5}$$

Перерезывающие силы справа и слева от шарнира должны быть равны, т. е.

$$\frac{\partial^3 w(a_1-0,\ y)}{\partial x^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3 w(a_1-0,\ y)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 w(a_1+0,\ y)}{\partial x^3}+$$

$$+(2-\sigma)\frac{\partial^3 w(a_1+0,\ y)}{\partial x\partial y^2},$$

или

$$\frac{\partial^3\Delta w(a_1,y)}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3\Delta w(a_1,\ y)}{\partial x\partial y^2}=\sigma\frac{\partial^3\Delta w(a_1,\ y)}{\partial x\partial y^2}. \tag{6}$$

Принимая во внимание условия (3), (4), (5) и (6), перепишем (2) в виде:

$$D\nabla^4[w]=q+D\overset{(3)}{\Gamma}(a_1)\ A(y)+\sigma D\overset{(1)}{\Gamma}(a_1)\ \frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2}, \tag{7}$$

где

$$A(y)=\frac{\partial\Delta w}{\partial x}.$$

Поскольку впоследствии w предполагаем искать в тригонометрических рядах, необходимо условие $M_1=0$ также выразить в контурных производных, для учета импульсивных функций.

$$\frac{\partial^2[w(a_1, y)]}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w(a_1, y)}{\partial y^2} = \overset{(1)}{\Gamma}(a_1) A(y). \qquad (8)$$

Уравнения (7) и (8) решают данную контактную задачу.

Примем плиту, опертую по контуру.

Тогда

$$w=\sum_m \sum_n A_{mn} S_{mx} S_{ny},$$

$$q=\sum_m \sum_n a_{mn} S_{mx} S_{ny},$$

$$\overset{(1)}{\Gamma}(a_1) = \frac{2}{a} \sum_m S_{ma_1} S_{mx},$$

$$\overset{(3)}{\Gamma}(a_1) = -\frac{2\pi^2}{a^3} \sum_m m^2 S_{ma_1} S_{mx},$$

$$A(y)=\sum_n B_n S_{ny},$$

$$\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} \sum n^2 B_n S_{ny},$$

где

$$S_{mx} = \sin\frac{m\pi x}{a}; \qquad S_{ny} = \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

A_n и B_n —неизвестные постоянные.

Подставляя все это в (7) и (8), произведя сравнения коэфициентов и решая уравнения, получим:

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} - \frac{2S_{ma_1}}{\pi^2 a} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\sigma\frac{n^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} B_n,$$

$$B_n = -\frac{a}{2\pi^2 D} \frac{\sum_m \frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\sigma\frac{n^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} a_{mn} S_{ma_1}}{\sum_m \frac{\frac{2m^2n^2}{a^2 b^2}(1-\sigma)+\frac{n^4}{b^4}(1-\sigma^2)}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} S^2_{ma_1}}.$$

Для изгибающих моментов и перерезывающих сил получаются расходящиеся ряды. По удалении из них членов разложения, отвечающих импульсивным функциям, ряды станут сходящимися и, стало быть, пригодными для определения M и Q.

Задача эта вряд ли имеет практическое значение. Она приведена для иллюстрации нашего метода.

Впрочем, если принять $a_1 = \frac{a}{2}$ и симметричную нагрузку, мы получим более интересную задачу о плите опертой по трем сторонам и со свободной стороной $x = \frac{a}{2}$. Изложенный здесь метод можно распространить и на оболочки, в первую очередь цилиндрические, состоящие из шарнирно-сочлененных отдельных элементов. При наличии изломов срединной поверхности, надо будет добавить еще импульсивные функции для кривизны, поскольку угол перелома есть сосредоточенная кривизна (2). Не исключена также возможность решения задачи этим приемом для шарнирно-сочлененных плит, лежащих на упругом основании, что также представляет практический интерес.

Институт строительных
материалов и сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, ноябрь.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Կողերից մեկին զուգահեռ հոդակապ ունեցող ուղղանկյուն սալ

Մեր առաջարկած մեթոդով (1) մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրների լուծումը ցուցադրելու համար, ուսումնասիրվում է պարագծով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի խնդիրը, երբ $x = a_1$ *գծով տեղավորված են հոդակապեր։*

Սալի դիֆերենցիալ հավասարումը և կոնտակտային պայմանները արտահայտելով կոնտուրային ածանցյալներով, ստացվել են (7) և (8) հավասարումները, որոնք լուծում են տվյալ կոնտակտային խնդիրը։

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով։ Կտրող ուժերի և ծռող մոմենտների արտահայտությունները ստացվում են տարամիտվող շարքերով, բայց անջատելով իմպուլսիվ ֆունկցիաներին համապատասխանող մասերը ստացվում են զուգամիտվող շարքեր։

Այս մեթոդը կարելի է տարածել նաև թաղանթների վրա և առաջին հերթին՝ գլանային թաղանթների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1, 2. *А. Г. Назаров.* ДАН Армянской ССР, 7, № 4, 1947 и 9, № 2, 1948.