ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
X 1949 1

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Теорема о покрытии отрезков для ограниченных однолистных функций

(Представлено А. Л. Шагиняном 12 VI 1948)

В настоящей статье показываем, что методом М. Лаврентьева и В. Шепелева ([1]) можно доказать более общую теорему о покрытии отрезков для однолистных функций, из которой предельным переходом получается не только результат этих авторов, но и теорема Ренгеля ([2]), являющаяся его обобщением.

Доказываемая нами теорема формулируется так:

Теорема I. Если $w=F(z)$ *есть функция класса* (s) *(т. е. регулярна и однолистна в круге* $|z|<1$, *имеет разложение вида* $F(z)=z+a_2z^2+\cdots$) *и* $|F(z)|<M$, $M\geq 1$, *то, по крайней мере, одна из* n *ближайших точек границы* D *отображения круга* $|z|<1$ *функцией* $w=F(z)$, *лежащих на* n *любых лучах, исходящих из* $w=0$ *под равными углами, отстоит от* $w=0$ *не ближе чем на* a, *которое определяется из соотношения:*

$$\frac{4M^{2n}a^n a'^n}{a^n(M^n-a'^n)^2+a'^n(M^n+a^n)^2}=1, \tag{1}$$

$0<a\leq M$ *и* a' — *любое положительное число, превосходящее все расстояния от* $w=0$ *до* n *ближайших точек границы* D, *лежащих на* n *биссекторах углов, образуемых вышеупомянутыми лучами.*

Указанная граница достижима.

Доказательство теоремы мы начинаем рассмотрением одного специального отображения.

Для краткости обозначим

$$l_k=e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{n}},\quad l'_k=e^{-i\frac{\alpha+(2k+1)\pi}{n}}$$

Функция

$$w=\sqrt[n]{4}\,d\,\frac{M\zeta}{\left(M^n+e^{i\alpha}\zeta^n\right)^{2/n}}=\sqrt[n]{4}\,dM\zeta+\cdots \tag{2}$$

однолистно отображает круг $|\zeta| < M$ на область D_0, получающуюся из плоскости w удалением n прямолинейных лучей, исходящих из точек $A_k = dl_k$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$ и проходящих, при продолжении, через точку $w=0$, причем прообразы точек $A_k = dl_k$ будут точки Ml_k $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$.

Проведем по радиусам в круге $|\zeta| < M$ разрезы, соединяющие точки al_k и Ml_k, $(k=0,1,\ldots,n-1)$ и обозначим получающуюся область через Δ_0.

Очевидно, что функция (2) отображает эту область Δ_0 на область D_1, отличающуюся от D_0 тем, что здесь разрезы начинаются от точек A'_k, где

$$A'_k = \sqrt[n]{4}\, dMa(M^n + a^n)^{-\frac{2}{n}} l_k = bl_k .$$

Сравнивая функции (2) и $w = \sqrt[n]{4}\, bz\left(1 + e^{i\alpha} z^n\right)^{-\frac{2}{n}}$ (которая отображает $|z| < 1$ на область D_1), убеждаемся, что функция

$$\frac{dM\zeta}{\left(M^n + e^{i\alpha}\zeta^n\right)^{2/n}} = \frac{bz}{\left(1 + e^{i\alpha} z^n\right)^{2/n}} \tag{3}$$

отображает круг $|z| < 1$ на область Δ_0 плоскости ζ.

Пусть теперь требуется отобразить на единичный круг область $\Delta_1(\zeta)$, получаемую из круга $|\zeta| < M$ удалением из него двух систем радиальных полуинтервалов $[al_k, Ml_k)$ и $[a'l'_k\, Ml'_k)$.

Очевидно, что преобразование (3) отображает область $\Delta_1(\zeta)$ на область $\Delta'_0(z)$, получаемую из $|z| < 1$ удалением из него радиальных полуинтервалов $[\mu l'_k, l'_k)$, $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$, где точка $\mu l'_k$ является образом точки $a'l'_k$, и μ определяется из соотношения

$$\frac{a'}{\left(M^n - a'^n\right)^{2/n}} = \frac{\sqrt[n]{4}\, a}{\left(M^n + a^n\right)^{2/n}} \cdot \frac{\mu}{\left(1-\mu^n\right)^{2/n}} .$$

С другой стороны, функция

$$\frac{ze^{-i\frac{\pi}{n}}}{\left(1-e^{i\alpha} z^n\right)^{2/n}} = \frac{\sqrt[n]{4}\,\mu}{\left(1+\mu^n\right)^{2/n}} \cdot \frac{\xi}{\left(1+e^{i\alpha}\xi^n\right)^{2/n}} \tag{4}$$

отображает область $\Delta'_0(z)$ на единичный круг $|\xi| < 1$.

Следовательно, совокупность функций (3) и (4) отображает область $\Delta_1(\zeta)$ на единичный круг $|\xi| < 1$.

Обозначив эту функцию через $\zeta = \zeta(\xi)$, имеем:

$$\zeta'(0) = \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{dz}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{\sqrt[n]{4}\, M^2 a}{\left(M^n + a^n\right)^{2/n}} \cdot \frac{\sqrt[n]{4}\,\mu}{\left(1+\mu^n\right)^{2/n}} .$$

Очевидно, что функция $\zeta(\xi)$ однолистна в $|\xi| < 1$, тогда если $|\zeta'(0)| = 1$, то $\zeta(\xi) \in (s)$ и

$$|\zeta'(0)| = \frac{4M^{2n} a^n a'^n}{a^n \left(M^n - a'^n\right)^2 + a'^n \left(M^n + a^n\right)^2} = 1. \tag{1'}$$

Отметим теперь такое предложение:

Лемма. Пусть имеем единичный круг $|z| < 1$ *и в нем* $2n$ *точек*

$$A_k = a\,l_k\,,\ B_k = a' l'_k, (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

где a, a' — *положительные числа, тогда этот круг можно однолистно отобразить на область, получающуюся из круга* $|w| < 1$ *удалением из него* n *полуинтервалов* $[d l_k, l'_k)$, *если* $a \leqslant a'$, *или* $d' l_k$, l_k), *если* $a \geqslant a'$, *где* $d, d' > 0$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *так, чтобы образы точек* A_k, B_k, *сохраняя прежние аргументы, были равноудаленными от центра круга* $|w| < 1$ *и* $z = 0$ *перешли бы в* $w = 0$.

Доказательство этого утверждения проводится цепью элементарных преобразований и применением принципа симметрии Шварца, поэтому мы его опускаем.

Вернемся к доказательству теоремы I.

Допустим, что она не верна, тогда существуют $2n$ точек

$$w_k = \rho^k\, l_k,\ \ w'_k = \rho'_k\, l'_k,\ \ \rho_k,\ \rho'_k > 0, (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

не принадлежащих области D и

$$\rho_k < a,\ \rho'_k \leqslant a',\ \ (\rho_k \leqslant a,\ \rho'_k < a'),$$

и пусть функция $w = F(z) \in (s)$ реализует однолистное отображение единичного круга $|z| < 1$ на эту область. Тогда функция $w = F(z)$, рассматриваемая в круге $|z| < 1$, не принимает указанных $2n$ значений.

Рассмотрим однолистную в $|z| < 1$ функцию $w = F_1(z)$,

$$|F_1(z)| <,\ \ M F_1(0) = 0,\ \ F_1'(0) > 0,$$

которая из всех функций $\{f(z)\}$, однолистных аналитических в $|z| < 1$, $\{|f(z)| < M\}$ и не принимающих $2n$ значений $\{w_k, w'_k\}$ имеет наибольший модуль производной в точке $z = 0$.

Повторяя доказательство известной теоремы М. А. Лаврентьева „Обобщенная теорема Кебе" ([3,4]), убедимся, что функция $F_1(z)$ существует, единственная, и обладает следующими свойствами: она реализует конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D_1, получаемую выбрасыванием из круга $|w| < M$ кривой Г, состоящей из конечного числа аналитических дуг. Любая точка Г, отличная от $\{w_k, w'_k\}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, либо принадлежит только одной дуге и является правильной точкой кривой Г, либо служит общим концом не менее чем трех дуг, встречающихся в одной точке под равными углами, если эта встреча происходит внутри круга $|w| \leqslant M$. Любой дуге AB, состоящей из правильных точек Γ, на окружности $|z|=1$ отвечают две дуги, равные по длине.

Применим теперь к кругу $|w|<M$ отображение $\zeta=\phi(w)$, $\phi(0)=0$, указанное в лемме, с таким расчетом, чтобы точки al_k и $a'l'_k$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$ перешли соответственно в точки λl_k, $\lambda l'_k$, $\lambda>0$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$, тогда точки w_k, w'_k перейдут в точки

$$\zeta_k=\delta_k l_k, \quad \zeta'_k=\delta'_k l'_k; \quad \delta_k, \delta'_k>0.$$

Согласно нашему предположению, $\delta_k<\lambda$, $\delta'_k \leqslant \lambda$, $(\delta_k \leqslant \lambda,\ \delta'_k<\lambda)$.

Пусть теперь функция $w=F_0(z)=z+a_2z^2+\cdots$, $|F_0(z)|<M$, однолистная в $|z|<1$, выпускает $2n$ значений

$$\left\{al_k,\ a'l'_k\right\}, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

и обладает максимумом модуля производной в точке $z=0$ среди тех однолистных функций $\left\{\varphi(z),\ |\varphi(z)|<M\right\}$, которые не принимают указанных $2n$ значений.

Очевидно, что $w=F_0(\xi)=\zeta(\xi)$, где $\zeta(\xi)$ дается совокупностью формул (3) и (4).

Применение преобразования $\zeta=\phi(w)$ к функциям

$$w=F_1(z),\quad w=F_0(z)$$

дает функции $\zeta_1(z)=\phi(F_1(z))$ и $\zeta_0(z)=\phi(F_0(z))$, что позволяет применить к ним метод Лаврентьева и Шепелева[1] и доказать, что

$$|\zeta_1'(0)|<|\zeta_0'(0)| \quad \text{или} \quad |\phi'(0)F_1'(0)|<|\phi'(0)F_0'(0)|.$$

Откуда: $|F_1'(0)|<|F_0'(0)|=1$.

Значит, $w=F(z)\ \overline{\in}\ (s)$, так как $|F'(0)| \leqslant |F_1'(0)|<1$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Полагая $a'=M$ в формуле (1), получаем

$$a=\frac{M^2}{\left(M^n+\sqrt{M^{2n}-M^n}\right)^{2/n}},$$

что позволяет формулировать предложение:

Теорема II. Если функция $F(z)\in(s)$ *и* $|F(z)|<M$, *то, по крайней мере, одна из* n *ближайших точек границы* D *образа круга* $|z|<1$ [*при его отображении функцией* $w=F(z)$], *лежащих на любых* n *лучах, исходящих из* $w=0$ *под равными углами, отстоит от* $w=0$ *не ближе, чем на*

$$\frac{M^2}{\left(M^n+\sqrt{M^{2n}-M^n}\right)^{2/n}}. \qquad (1'')$$

Полученная граница достижима.

В формуле (1) положим теперь $M \to \infty$, тогда $a = \dfrac{a'}{\sqrt[n]{4a'^n - 1}}$.

Из теоремы I и полученного соотношения непосредственно следует известная теорема Ренгеля (³) об однолистных функциях, являющаяся обобщением теоремы Лаврентьева-Шепелева.

Наконец, в формуле (1″), полагая $n=1$, получаем:

$$a = \frac{M^2}{(M+\sqrt{M^2-M})^2} \quad \text{и}$$

можем формулировать теорему, доказанную впервые Пиком с помощью леммы Шварца.

Теорема III. Если функция $F(z) \in (s)$ *и* $|F(z)| < M$, *то образ окружности* $|z| = 1$, *при отображении функцией* $w = F(z)$, *находится в кольце*

$$\frac{M^2}{(M+\sqrt{M^2-M})^2} < |w| < M.$$

Сектор математики и механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, май.

Հ. Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

Մի թեորեմ միաթերթ սահմանափակ ֆունկցիաների մասին

Այս աշխատանքը սերտորեն կապված է մաթեմատիկոս Սեգեոյի կողմից 1932 թվին առաջադրված հետևյալ խնդրի հետ։

Դիցուք՝ $W=f(z)$ *ֆունկցիան պատկանում է ֆունկցիաների* (S) *դասին (այսինքն՝ անալիտիկ ու միաթերթ է* $|z| < 1$ *շրջանում և ունի* $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ *վերլուծությունը), պահանջվում է որոշել այն* n *հատվածներից ամենամեծի նվազագույն երկարությունը, որոնք ընկած են* $w=0$ *կետից հավասար անկյունների տակ դուրս եկող* n *ցանկացած ճառագայթների վրա և գտնվում են* $w=f(z)$ *ֆունկցիայի միջոցով* $|z| < 1$ *շրջանից ստացված պատկերի մեջ։*

Այդ խնդրի լուծումը առաջին անգամ ցանկացած n*-ի համար տվել են սովետական գիտնականներ Լավրենտևը և Շեպելյովը 1931 թվին։*

Հետագայում Ռենգելը, կիրառելով էապես տարբեր մեթոդ, կարողացել է ստանալ ավելի ընդհանուր արդյունք։

Այստեղ ցույց է տրվում, որ հիմնվելով Լավրենտևի և Շեպելյովի մեթոդի սահմաններում, հնարավոր է ապացուցել ավելի ընդհանուր թեորեմ, որից սահմանային անցման միջոցով, որպես մասնավոր հետևանքներ ստացվում են վերոհիշյալ հեղինակների արդյունքները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Математический сборник, 2 (44): 2, стр. 319, 1937. 2. Успехи математических наук, в. VI. стр. 59, М.—Л., ГИЗ, 1939. 3. Тр. Математического института им В. А. Стеклова, 5, стр. 177, 1934. 4. Успехи математических наук, в. VI стр. 64, М.—Л., ГИЗ, 1939.