ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

IX 1948 5

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения

(Представлено А. Г. Назаровым 18 IX 1948)

1. Здесь мы рассматриваем симметрично нагруженные оболочки вращения, изготовленные из ортотропных материалов и имеющие симметричные граничные условия.

Предполагаем, что одна из плоскостей упругой симметрии материала оболочки параллельна срединной поверхности, а остальные две перпендикулярны к координатным линиям $\varphi^*=\mathrm{const}$, т. е. меридианам поверхности и $s=\mathrm{const}$—параллельным кругам.

Считаем также, что для рассматриваемой оболочки справедлива гипотеза Кирхгоффа—Лява и потому все вычисления производим с точностью этой гипотезы ([1,2]).

2. Как известно, напряженное состояние оболочки определяется растягивающими усилиями T_1, T_2, перерезывающим усилием N и изгибающими моментами G_1, G_2. Под действием этих усилий элемент оболочки находится в равновесии. Уравнения равновесия представляются так ([2]):

$$(\nu T_1)^{\cdot} + T_2 \sin\alpha + \frac{\nu}{R_1} N + E_1 \nu = 0 \qquad 2.1$$

$$(\nu N)^{\cdot} - \nu \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) + E_2 \nu = 0 \qquad 2.2$$

$$(G_1 \nu)^{\cdot} + G_2 \sin\alpha - \nu N + L_3 \nu = 0 \qquad 2.3$$

Здесь точкой обозначаем диференцирование по s.

Как известно, введением одной функции V уравнениям равновесия можно дать вид:

$$\nu T_1 = -V\sin\alpha + \Phi_1(s), \quad \nu N = V\cos\alpha + \Phi_2(s), \qquad 2.4$$

$$(\nu G_1)^{\cdot} + G_2 \sin\alpha - V\cos\alpha = -\nu L_3 + \Phi_2(s). \qquad 2.5$$

При этом принята $T_2 = \dot{V}$.

* Здесь и в дальнейшем придерживаемся обозначений цитированной работы ([2]).

В этих формулах члены $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ зависят от внешних нагрузок [2].

3. Деформация срединной поверхности оболочки характеризуется тремя компонентами деформации ε_1, ε_2, ϑ, связанными весьма важным соотношением [2].

$$\nu \varepsilon_2^{\cdot} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin\alpha + \vartheta \cos\alpha. \qquad 3.1$$

Перемещения точек срединной поверхности оболочки определяются формулами:

$$\xi = \nu \varepsilon_2, \quad \zeta = \zeta_0 + \int\limits_{s_0}^{s} (\varepsilon_1 \cos\alpha + \vartheta \sin\alpha) \, ds. \qquad 3.2$$

4. Кроме указанных соотношений для решения задачи необходимы также связи между деформациями и напряжениями.

Из обобщенного закона Гука имеем [3]:

$$\sigma_1 = B_{11} e_1 + B_{12} e_2, \quad \sigma_2 = B_{22} e_2 + B_{12} e_1 \qquad 4.1$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = \frac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2} = \frac{E_2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2},$$

$$e_1 = \varepsilon_1 + x\varkappa_1, \quad e_2 = \varepsilon_2 + x\varkappa_2, \qquad 4.2$$

здесь

$$\varkappa_1 = -\vartheta^{\cdot}, \quad \varkappa_2 = \vartheta \frac{\sin\alpha}{\nu} \qquad 4.3$$

Имея значения напряжения σ_1 и σ_2 для внутренних усилий на двух основных сечениях $\varphi = \text{const}$, $s = \text{const}$, получим следующие формулы:

$$T_1 = 2h(B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2), \quad T_2 = 2h(B_{22}\varepsilon_2 + B_{12}\varepsilon_1), \qquad 4.4$$

$$G_1 = \frac{2h^3}{3}(B_{11}\varkappa_1 + B_{12}\varkappa_2), \quad G_2 = \frac{2h^3}{3}(B_{22}\varkappa_2 + B_{12}\varkappa_1). \qquad 4.5$$

В этих формулах h — половина толщины оболочки.

5. Данные соотношения вполне достаточны для расчета симметрично нагруженных анизотропных оболочек вращения. После некоторых преобразований из вышеприведенных уравнений получаем:

$$\begin{aligned} &V^{\cdot\cdot} - V^{\cdot}\frac{\sin\alpha}{\nu} - V\frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{\sin^2\alpha}{\nu^2} + V\frac{B_{12}}{B_{11}}\frac{1}{R_1R_2} = \frac{2h\Omega}{B_{11}}\frac{\vartheta}{R_2} + \Psi_1(s), \\ &\vartheta^{\cdot\cdot} - \vartheta^{\cdot}\frac{\sin\alpha}{\nu} - \vartheta\frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{\sin^2\alpha}{\nu^2} - \vartheta\frac{B_{12}}{B_{11}}\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{3}{2h^3B_{11}}\frac{V}{R_2} + \Psi(s), \end{aligned} \qquad 5.1$$

где

$$\Psi_1 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{1}{\nu}\Phi^{\cdot}_1(s) - \frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{\sin\alpha}{\nu^2}\Phi_1(s)$$

$$\Psi_2 = \frac{3}{2h^3B_{11}}\left[L_3 - \frac{1}{\nu}\Phi_2(s)\right] \qquad 5.2$$

$$\Omega = B_{11}\ B_{22} - B^2_{12}\ . \qquad 5.3$$

Обозначая:

$$L(a) = a^{\cdot\cdot} - \frac{\sin\alpha}{\nu}\ a^{\cdot} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{\sin^2\alpha}{\nu^2} a, \qquad 5.4$$

получим следующую систему диференциальных уравнений для расчета анизотропных оболочек вращения:

$$L(V) + \frac{V}{R_1R_2}\frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{2h\Omega}{B_{11}}\frac{\vartheta}{R_2} + \Psi_1(s)$$

$$L(\vartheta) - \frac{\vartheta}{R_1R_2}\frac{B_{12}}{B_{11}} = -\frac{3}{2h^3B_{11}}\frac{V}{R_2} + \Psi_2(s). \qquad 5.5$$

Введением новой неизвестной функции

$$\sigma = \vartheta - i\frac{B_{11}}{2h^2\Omega}\sqrt{\frac{3\Omega}{B^2_{11}}}\ V \qquad 5.6$$

задачу можно привести к решению одного уравнения второго порядка:

$$L(\sigma) + \frac{1}{hR_2}\sqrt{\frac{3\Omega}{B^2_{11}}}\ \sigma = \Psi(s), \qquad 5.7$$

где

$$\Psi = \frac{B_{11}}{2h^2\Omega}\sqrt{\frac{3\Omega}{B^2_{11}}}\left\{\frac{1}{h}\sqrt{\frac{3\Omega}{B^2_{11}}}\left[L_3 - \frac{1}{\nu}\Phi_2(s)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{\nu}\left[\frac{B_{12}}{B_{11}}\Phi^{\cdot}_1(s) - \frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{\sin\alpha}{\nu}\Phi_1(s)\right]\right\}. \qquad 5.8$$

6. За частное решение принимаем решение безмоментной задачи. При этом, как известно, $N_1 = 0$, $G_1 = G_2 = 0$, поэтому (2),

$$\vartheta = 0, V = -\frac{\Phi_2(s)}{\cos\alpha}. \qquad 6.1$$

Тогда на основе (6.1) и (5.6), частное решение примет вид:

$$\sigma_0 = i\frac{B_{11}}{2h^2\Omega}\sqrt{\frac{3\Omega}{B^2_{11}}}\frac{\Phi_2(s)}{\cos\alpha}. \qquad 6.2$$

Общее решение однородного уравнения ищем тем же путем, что для изотропных оболочек (2).

$$\sigma = (A_1 - iB_1)\,(X_1 + iY_1) + (A_2 - iB_2)\,(X_2 + iY_2), \qquad 6.3$$

где $(X_1 + iY_1)$ и $(X_2 + iY_2)$ являются линейно независимыми частными решениями диференциального уравнения, $(A_1 - iB_1)$ и $(A_2 - iB_2)$—произвольные постоянные.

Складывая (6.2) и (6.3) и отделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\vartheta = A_1 X_1 + B_1 Y_1 + A_2 X_2 + B_2 Y_2 \qquad 6.4$$

$$V = \frac{2h^2\Omega}{B_{11}} \sqrt{\frac{B_{11}^2}{3\Omega}}\,(B_1 X_1 - A_1 Y_1 + B_2 X_2 - A_2 Y_2) - \frac{\Phi_2(s)}{\cos\alpha}. \qquad 6.5$$

Имея значения ϑ и V, без затруднений можем найти внутренние усилия и перемещения.

Таким образом мы получили основные уравнения для расчета ортотропных оболочек вращения. Эти уравнения от уравнений изотропных оболочек отличаются только лишь более сложными коэфициентами, выражающими анизотропность материала оболочки. Из этих уравнений, как частный случай, получаются уравнения изотропной оболочки.

Институт строительных
материалов и сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван. 1948, август.

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Սիմետրիկ բեռնված պտտման անիզոտրոպ թաղանթներ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են սիմետրիկ բեռնված պտտման թաղանթները, որոնք պատրաստված են օրտոտրոպ նյութերից։ Ցույց է տրված, որ խնդրի լուծման համար ստացվում են պարզ դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք իզոտրոպ թաղանթների հավասարումներից տարբերվում են միայն հաստատուն գործակիցներով, որոնք արդյունք են թաղանթների անիզոտրոպ կառուցվածքի։ Ստացված հավասարումներից որպես մասնավոր դեպք կարելի է ստանալ իզոտրոպ թաղանթների հավասարումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *В. В. Новожилов* и *Р. Финкельштейн*. ПММ, 7, в. 5, 1943. 2. *А. Н. Лурье*. Статика тонкост. упругих оболочек, 1947. 3. *С. А. Амбарцумян*. ПММ, 12, в. 1, 1948.