ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
IX 1948 2

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Н. Х. Арутюнян

Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения

(Представлено А. Г. Назаровым 4 IV 1948)

В настоящей работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с полигональным поперечным сечением. При этом рассматриваются поперечные сечения полигонального очертания частного вида, а именно прокатные профиля.*

Не нарушая общности, мы будем излагать предлагаемый здесь метод решения задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения на примере равнобокового уголка с *произвольной толщиной стенок.*

1°. *Диференциальные уравнения равновесия и их решения.* Определение функции напряжения $u(x, y)$ при кручении, как известно, сводится к интегрированию уравнения Пуассона.

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{1.1}$$

при условии $u = 0$ на контуре области Γ.

Будем искать функцию $u(x, y)$ в области ONAE (см. черт. 1) в следующем виде:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} f_k(x) \sin\frac{k\pi y}{d} + \Phi(x, y), \tag{1.2}$$

причем

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 0 & x \geqslant d \\ \Phi_1(x, y) & x \leqslant d \end{cases} \tag{1.3}$$

В силу симметрии области, функция $u(x, y)$ будет в OBCM такой же, как и в ONAE, только x и y поменяются ролями. Кроме того для непрерывности и однозначности решения $\Phi_1(x,y)$ должна удовлетворять следующим условиям:

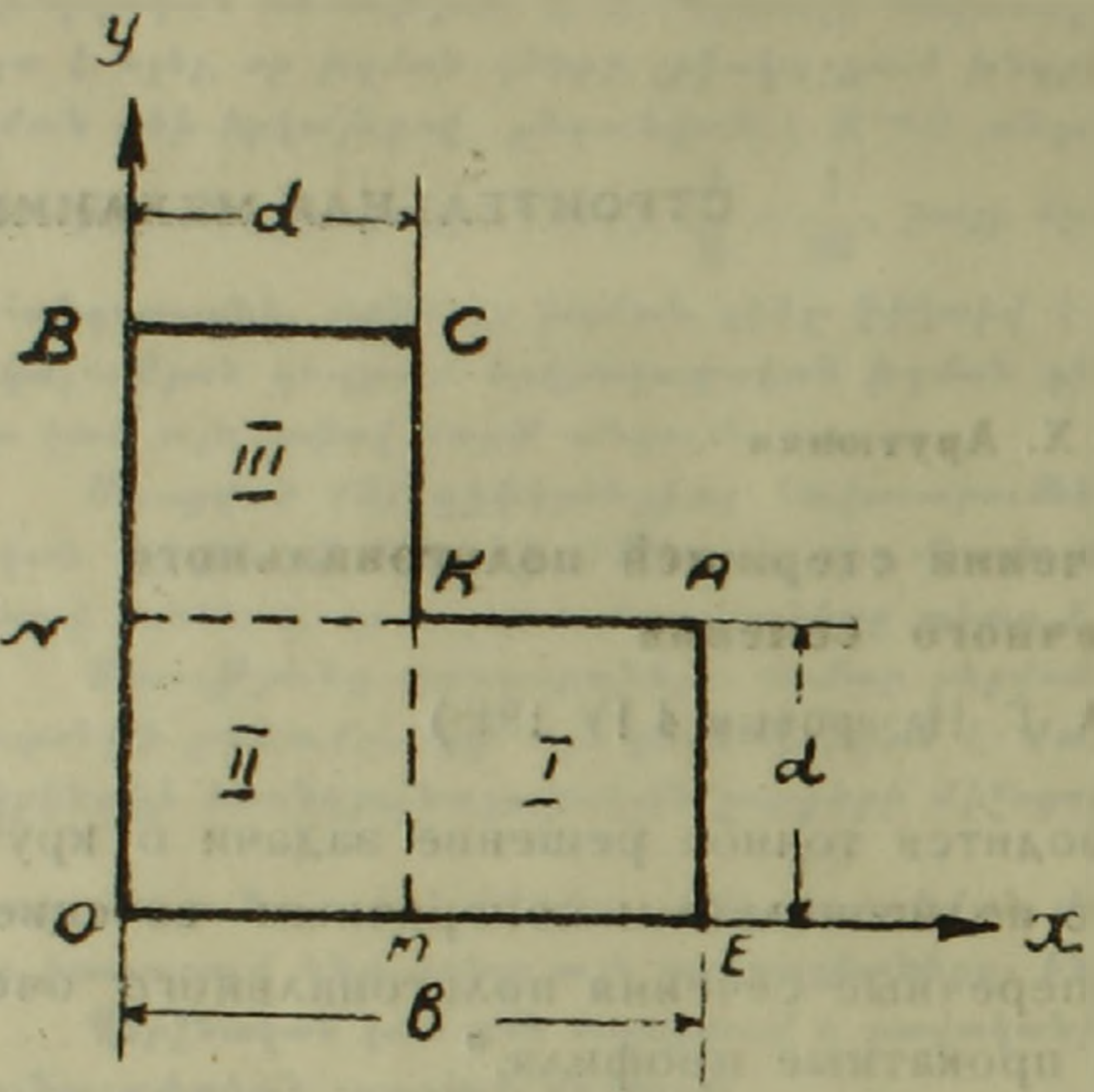
$$\Phi_1(d, y) = \Phi_1(x, 0) = 0 \qquad \left.\frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial x}\right|_{x=d} = 0 \tag{1.4}$$

$$\Phi_1(x, d) = \sum_{k=1}^{k=\infty} f_k(d) \sin\frac{k\pi x}{d} \qquad \Phi_1(x,y) = \Phi_1(y, x).$$

* Существующие эмпирические [1,2,3] и теоретические [4,5,6] приближенные решения задачи о кручении для некоторых прокатных профилей пригодны только для определения жесткости, причем при условии тонкостенности профиля.

Тогда из соотношения (1.1) согласно (1.2) и (1.3) получим:

$$f_k(x) = L_k \operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d} + F_k \operatorname{ch}\frac{k\pi x}{d} + \frac{4d^2}{k^3\pi^3}\left[1+(-1)^{k+1}\right] \qquad (1.5)$$



Черт. 1.

$$\Delta^2\Phi_1(x, y) = 0. \qquad (1.6)$$

2°. *Определение вспомогательной функции* $\Phi_1(x, y)$. Функция $\Phi_1(x, y)$ должна быть гармонической в области ONKM и удовлетворять условиям (1.4) на контуре.

Следуя идее Гринберга (7), будем искать решение для функции $\Phi_1(x, y)$ в такой же форме, как и при однородных граничных условиях.

Положим, что

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} v_k(x) \sin\frac{k\pi y}{d} \qquad (2.1)$$

$$v_k(x) = \frac{2}{d}\int_0^d \Phi_1(x, y) \sin\frac{k\pi y}{d}\, dy \qquad (2.2)$$

Тогда получим:

$$v_k(x) = \frac{2}{\pi}(-1)^k\left[\operatorname{ch} k\pi \operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d} - \operatorname{ch} k\pi \operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d}\right]\sum_{p=1}^{p=\infty} f_p(d)\,\frac{p\,.(-1)^p}{k^2+p^2} -$$

$$-\frac{2k}{\pi}(-1)^k\sum_{p=1}^{p=\infty} f_p(d)\,\frac{\sin\frac{p\pi x}{d}}{k^2+p^2}, \qquad (2.3)$$

причем использованы условия (1.4).

3°. *Удовлетворение граничным условиям.* Условия на контуре $u(x, y) = 0$ можно представить в виде:

$$f_k(b) = 0 \text{ и } f_k'(0) + v_k(0) = 0 \qquad (3.1)$$

Подставляя значения $f_k(x)$ и $v_k(x)$ из (1.2) и (2.3) в (3.1), получим для определения F_k следующую бесконечную систему уравнений.

$$F_k = -\frac{4d^2}{k^3\pi^3}\left[1+(-1)^{k+1}\right] + \frac{2}{\pi}(-1)^k \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1}^{p=\infty} F_p\,\frac{e^{-p\pi}\cdot p(-1)^p}{k^2+p^2} -$$

$$-\frac{16d^2}{\pi^4}(-1)^k \operatorname{sh} k\pi \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\left[1-\dfrac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh}\frac{p\pi b}{d}}\right]}{p^2(k^2+p^2)} \qquad (3.2)$$

4^0. *Исследование и решение бесконечной системы.* Введем новые неизвестные C_k, полагая

$$F_k = C_k d^2 . \frac{\operatorname{sh} k\pi}{k} (-1)^{k+1}, \tag{4.1}$$

тогда система (3.2) будет приведена к следующей системе бесконечных уравнений:

$$C_k = -\frac{4\left[1+(-1)^{k+1}\right]}{k^2\pi^3 \operatorname{sh} k\pi} + \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{p=\infty} C_p . \frac{\operatorname{sh} p\pi . e^{-p\pi}}{k^2+p^2} + $$

$$+ \frac{16k}{\pi^4} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left[1-\dfrac{\operatorname{sh} p\pi}{\operatorname{sh}\dfrac{p\pi b}{d}}\right]}{p^2(k^2+p^2)} . \tag{4.2}$$

Полученная бесконечная система уравнений (4.2) *вполне регулярна, так как*

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2k . \operatorname{sh} p\pi . e^{-p\pi}}{\pi\left[1-\dfrac{\operatorname{sh} k\pi . e^{-k\pi}}{\pi k}\right][k^2+p^2]} < \frac{1}{2} \tag{4.3}$$

и свободный член b_k этой системы удовлетворяет неравенству

$$b_k \leqslant 0{,}0752 - \frac{0{,}824}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}} \tag{4.4}$$

для любых k при $\dfrac{b}{d} > 1$.

Обозначим значение искомых неизвестных C_k с недостатком через $\tilde{C}_k$, а с избытком через $\bar{C}_k$, т. е. $\tilde{C}_k \leqslant C_k \leqslant \bar{C}_k$. (4.5)

Пользуясь известными теориями о вполне регулярных системах ([8]), для $\tilde{C}_k$ и $\bar{C}_k$ получим следующие выражения:

$$\tilde{C}_1 = 0{,}0833 - \frac{1{,}2376}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}} \qquad \tilde{C}_2 = 0{,}0905 - \frac{1{,}0388}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}}$$

$$\tilde{C}_3 = 0{,}0716 - \frac{0{,}8063}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}} \qquad \tilde{C}_k = \frac{16k}{\pi^4}\left(\frac{\pi^2}{8k^2} - \frac{\pi}{4k^3} + \frac{\pi}{2k^3\left(1+e^{k\pi}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}(k^2+1)}\right) \qquad (k \geqslant 4) \tag{4.6}$$

$$\bar{C}_1 = 0{,}0946 - \frac{1{,}3615}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}} \qquad \bar{C}_2 = 0{,}1055 - \frac{1{,}2030}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{d}}$$

$$\overline{C}_3 = 0{,}0949 - \frac{1{,}1190}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{d}} \quad \overline{C}_k = 0{,}08856 - \frac{0{,}9720}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{d}} \quad (k > 4).$$

В случае тонкостенных уголков, когда $\frac{b}{d} > 4$ соотношения (4.3), (4.4) и (4.5) для $\tilde{C}_k$, $\overline{C}_k$ и b_k очень упрощаются.

5°. *Определение функции напряжения* — $u(x, y)$. Подставляя значения $\Phi_1(x, y)$ и $f_k(x)$ из соотношения (1.5), (2.3) и (2.1) в (1.2), для функции напряжения $u(x, y)$ в области ONAE получим следующие выражения:

$$u(x, y) = u^0(x, y) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{p=1}^{p=\infty} f_p(d) \frac{(-1)^k \cdot (-1)^p p \cdot \sin\frac{k\pi y}{d}}{k^2+p^2} \operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d} e^{-k\pi} - \tag{5.1}$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{p=1}^{k=\infty} f_p(d) \frac{k \cdot (-1)^k \sin\frac{p\pi x}{d} \sin\frac{k\pi y}{d}}{k^2+p^2} \quad \text{при} \quad x < d$$

$$u(x, y) = u^0(x, y) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^p \operatorname{sh} k\pi \cdot e^{-\frac{k\pi x}{d}} \cdot p}{k^2+p^2} f_p(d) \sin\frac{k\pi y}{d} \tag{5.2}$$

при $x > d$,

где $u^0(x, y)$—функция напряжения для призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением AEON или OBCM.

$$f_k(d) = F_k e^{-k\pi} + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} \left[1+(-1)^{k+1}\right] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{d}}\right]. \tag{5.3}$$

Для области OBCM функция напряжения $u(x, y)$ будет такой же, как и (5.2), только x и y поменяются местами.

Подставляя в соотношения (5.1) и (5.2) вместо значения C_k соответственно $\tilde{C}_k$ и $\overline{C}_k$, получим нижнюю и верхнюю границу для функции напряжения $u(x, y)$

$$\tilde{u}(x, y) < u(x, y) < \overline{u}(x, y). \tag{5.4}$$

6°. *Определение жесткости при кручении*. Обозначим для краткости область AKME через I, область KNOM через II и NBCK через III. Тогда для жесткости при кручении будем иметь:

$$D = 2G\theta \iint_{\Omega} u(x,y)\,dx\,dy = 2G\theta \left[\iint_{II} u(x,y)\,dx\,dy + \right.$$

$$\left. +2 \iint_{I} u(x,y)\,dx\,dy \right], \tag{6.1}$$

где
G — модуль сдвига,
θ — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставляя значения C_k и $\tilde{C}_k$ из (4.5) в (6.1) и производя интегрирование, получим для значений верхней и нижней границ жесткости следующие выражения:

$$\bar{D} = D^0 \left[1 + \frac{\bar{\beta}\left(\frac{b}{d}\right) d^4}{D^0} \right] = D^0 \bar{\alpha}_1 \left(\frac{b}{d}\right)$$

$$\tilde{D} = D^0 \left[1 + \frac{\tilde{\beta}\left(\frac{b}{d}\right) d^4}{D^0} \right] = D^0 \tilde{\alpha}_1 \left(\frac{b}{d}\right), \tag{6.2}$$

где
D^0—сумма жесткостей тех прямоугольников, которые составляют данный профиль, значения которых приводятся во всех курсах теории упругости или сопротивления материалов

$$\bar{\beta}\left(\frac{b}{d}\right) = 0{,}1360 - 4{,}5364\, e^{-\frac{\pi b}{d}} + 8{,}720\, e^{-\frac{2\pi b}{d}}$$

$$\tilde{\beta}\left(\frac{b}{d}\right) = 0{,}1132 - 2{,}9986\, e^{-\frac{\pi b}{d}} + 11{,}3650\, e^{-\frac{2\pi b}{d}}. \tag{6.3}$$

Таким образом имеем, *что в соотношении (6.2) первый множитель представляет сумму жесткостей отдельных прямоугольников, составляющих данный профиль, а второй множитель* $\alpha_1\left(\frac{b}{d}\right)$ *является коэфициентом увеличения, представляющим влияние стыков данного прокатного профиля на величину его жесткости.*

Некоторые значения этого коэфициента для различных отношений $\frac{b}{d}$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

$\frac{b}{d}$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	6,0	∞
$\bar{\alpha}_1\left(\frac{b}{d}\right)$	1,298	1,213	1,146	1,109	1,086	1,071	1,042	1,00
$\bar{\alpha}\left(\frac{b}{d}\right)$	1,270	1,190	1,123	1,091	1,072	1,061	1,036	1,00
Максимальная погрешность в %	1,6	1,65	1,7	1,5	1,02	0,85	0,35	0

В случае тонкостенного профиля, когда $\frac{b}{d} > 4$, формулы (6.2) для значения жесткости очень упрощаются и имеют следующий вид:

$$\bar{D} = \frac{(a+b)d^3}{3}\left[1 - \frac{0{,}9205d}{a+b}\right]$$

$$\bar{D} = \frac{(a+b)d^3}{3}\left[1 - \frac{0{,}8530d}{a+b}\right], \tag{6.4}$$

т. е.

$$\frac{(a+b)d^3}{3}\left[1 - \frac{0{,}8530d}{a+b}\right] < D < \frac{(a+b)d^3}{3}\left[1 - \frac{0{,}9205d}{a+b}\right]. \tag{6.5}$$

Максимальная погрешность меньше, чем 0.85%.

7°. *Определение напряжений* τ_{xz} и τ_{yz}. Для определения напряжений τ_{xz} и τ_{yz} имеем следующие соотношения:

$$\tau_{xz} = G\theta\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|, \qquad \tau_{yz} = G\theta\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|. \tag{7.1}$$

Подставляя значения $u(x, y)$ из (5.1) и (5.2) в (7.1), имеем

$$|\tau_{xz}| = |\tau_{yz}| = \tau^0_{xz} +$$

$$+ \frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty} f_p(d)\frac{(-1)^k(-1)^p . k . p \sin\frac{k\pi y}{d}}{k^2+p^2}\operatorname{ch}\frac{k\pi x}{d}e^{-k\pi} -$$

$$- \frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty} f_p(d)\frac{k(-1)^k p . \cos\frac{p\pi x}{d}\sin\frac{k\pi y}{d}}{k^2+p^2} \quad \text{при } x < d, \tag{7.2}$$

причем при вычислении τ_{xz} в области ONKM $(x < d)$ для удобства мы берем для τ_{xz} выражение τ_{yz} в точках, симметричных относительно диагонали уголка.

$$\tau_{xz} = \tau^0_{xz} = \frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi\, e^{-\frac{k\pi x}{d}} k . p(-1)^p \cos\frac{k\pi y}{d}}{k^2+p^2} \tag{7.3}$$

при $x \geqslant d$,

где

τ^0_{xz} — напряжение в призматическом стержне с прямоугольным поперечным сечением AEON или OBCM, значение которого приводится в курсах по теории упругости.

Исследование полученных соотношений (7.2) и (7.3) показывает, что максимальные напряжения получаются в точке

$y=0;\ x=0{,}45\,b$ (или $x=0;\ y=0{,}45\,b$) при $\frac{b}{d} = 1{,}5$ и $y=0;\ x \approx \frac{b}{2}$ (или $x=0,\ y\approx\frac{b}{2}$) при $\frac{b}{d} \geq 3$. Таким образом, практически можно считать, что наибольшие тангенциальные напряжения получаются почти в средних точках длинных сторон уголка.

Подставив значения $x=0;\ y=\frac{b}{2}$ в соотношения (7.2) и (7.3), получим окончательно следующие выражения:

$$\tau_{max} = \tau^0_{max} + \frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{k(-1)^k p(-1)^p f_p(d)\, e^{-k\pi}}{k^2+p^2}\sin\frac{k\pi b}{2d} -$$

$$-\frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{k(-1)^k f_p(d)p}{k^2+p^2}\sin\frac{k\pi b}{2d}, \tag{7.4}$$

$$\text{если } \frac{b}{2} < d$$

$$\tau_{max} = \tau^0_{max} + \frac{2G\theta}{d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi e^{-\frac{k\pi b}{2d}}\cdot p(-1)^p}{k^2+p^2} \tag{7.5}$$

$$\text{если } \frac{b}{2} > d$$

выражения (7.4) и (7.5) можно представить в виде:

$$\tau_{max} = \tau^0_{max}\left[1+\frac{\Delta\tau}{\tau^0_{max}}\right] = \alpha_2\left(\frac{b}{d}\right)\tau^0_{max}, \tag{7.6}$$

где

$\Delta\tau$ — добавок к напряжению τ^0_x, значения которого определяются вторыми слагаемыми в (7.4) и (7.5) в виде рядов.

Таким образом имеем, что *первый множитель в соотношении (7.6) выражает максимальное напряжение для прямоугольника* OANM, *а второй множитель $\alpha_2\left(\frac{b}{d}\right)$ является коэфициентом увеличения, представляющим влияние стыков данного прокатного профиля на величину наибольшего тангенциального напряжения.*

Некоторые значения для верхней и нижней границ коэфициента $\alpha_2\left(\frac{b}{d}\right)$ для различных отношений сторон уголка $\frac{b}{d}$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

$\frac{b}{d}$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	10	∞
τ^0_{max}	$0{,}848G\theta d$	$0{,}930G\theta d$	$0{,}968G\theta d$	$0{,}985G\theta d$	$0{,}996G\theta d$	$0{,}997G\theta d$	$1{,}00G\theta d$	$1{,}00G\theta d$
$\bar{\alpha}_2\left(\frac{b}{d}\right)$	1,250	1,188	1,142	1,033	1,016	1,008	1,0003	1,000
$\tilde{\alpha}_2\left(\frac{b}{d}\right)$	1,225	1,162	1,122	1,024	1,010	1,003	1,000	1,000
Максимальная погрешность в %	2,8	2,4	1,6	0,95	0.6	0,5	0,03	0

$$\tilde{\alpha}_2\left[\frac{b}{d}\right] < \alpha_2\left[\frac{b}{d}\right] < \bar{\alpha}_2\left[\frac{b}{d}\right] \tag{7.7}$$

Несомненно представляет большой практический интерес решение задачи о кручении и особенно о центре изгиба для других прокатных профилей (двухтавровые балки, швеллер, коробчатые сечения и т. д.), что составляет содержание следующих сообщений.

Сектор Математики и Механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, март.

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Պոլիգոնալ ընդլայնական կտրվածք ունեցող ձողերի ոլորման խնդրի լուծումը

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է պոլիգոնալ ընդլայնական կտրվածք ունեցող ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը, ըստ որում դիտարկվում են այնպիսի պոլիգոնալ կտրվածք ունեցող ձողեր, որոնք ինժեներական կոնստրուկցիաների հիմնական էլեմենտներն են կազմում (գլանված պրոֆիլներ)։

Գոյություն ունեցող Ֆեպպլի (1), Ինջե-Լյազի (2) և Ծնիկլսի (3) մոտավոր էմպիրիկ բանաձևերը կիրառելի են միայն ձողի ոլորման կոշտությունը որոշելու համար, այն էլ միայն բարակապատ ձողերի դեպքում։

Գլանված պրոֆիլներ ունեցող բարակապատ ձողերի ոլորման խնդրի մի քանի մասնավոր դեպքերի մոտավոր լուծումը վարիացիոն եղանակով՝ բերված է Լ. Վ. Կանտորովիչի (4), Տ. Կ. Չեպովայի (5) և մեր նախորդ աշխատանքում (6)։

Սակայն, եթե վերոհիշյալ մոտավոր լուծումները բարակապատ ձողերի կոշտությունը որոշելու համար լավ համընկնում են էքսպերիմենտալ տվյալների հետ, ապա այդ բնավ տեղի չունի հաստապատ ձողերի դեպքում, որոնց համար, որքան մեզ հայտնի է, այդ խնդիրը չի լուծված։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *A. Föppl.* Vorlesungen, 5, 1922. 2. *Inge Lyse Bruce G.* Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Vol. 61, 469—508, 1935. 3. *Д. В. Бычков* и *А. К. Мрощинский.* Кручение металлических балок, Москва, Стройиздат, 1944. 4. *Л. В. Канторович.* Прикл. Мат. и Мех., 6, вып. 1. 1942. 5. *Т. К. Чепова.* ПММ, 1. вып. 2, 1937. 6. *Н. Х. Арутюнян.* ПММ, 6. вып. 1, 1942. 7. *Г. А. Гринберг.* Изв. АН СССР, сер. физ., 10, № 2, 1946. 8. *Л. В. Канторович* и *Н. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа, Москва, ОНТИ, 1941.