

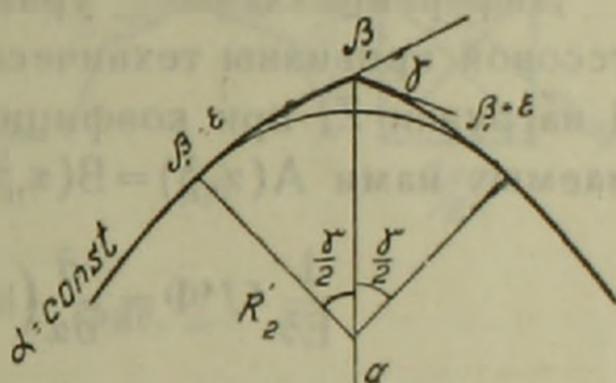
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Некоторые контактные задачи теории оболочек

(Представлено 29 V 1948)

Здесь мы рассматриваем некоторые оболочки, срединная поверхность которых претерпевает излом по линиям, совпадающим с линиями главных кривизн  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Для возможности пользования методом, изложенным нами в (1), покажем, что угол излома  $\gamma$  можем интерпретировать как правильный импульс кривизны (2). На фиг. 1 показана координатная линия  $\beta$ , в точке  $\beta = \beta_1$  которой имеется скачок в направлении касательной, равный углу  $\gamma$ .



Фиг. 1.

Проведем биссектрису  $\beta_1 a$  и прочертим дугу малым радиусом  $R'_2 = \frac{1}{k'_2}$ .

Тогда

$$\int_{\beta_1 - \epsilon}^{\beta_1} \frac{d\beta}{R'_2} = \int_{\beta_1}^{\beta_1 + \epsilon} \frac{d\beta}{R'_2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Ясно, что при  $R'_2 \rightarrow 0$ , и, стало быть,  $\epsilon \rightarrow 0$  мы действительно получаем левый и правый импульсы кривизны равной величины  $\frac{\gamma}{2}$ .

Поэтому мы можем главную кривизну  $k_2$  записать как:  $k_2 + \gamma \Gamma^{(1)}(\beta_1)$ , (1)

где  $\Gamma^{(1)}(\beta_1) = \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 - 0) + \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 + 0)$  (2)

представляет собою единичную правильную импульсивную функцию, распределенную вдоль кривой  $\beta_1 = \text{const}$ .

В дальнейшем нам надо будет рассматривать произведение  $\Gamma^{(1)}(\beta_1) f(x, \beta)$ .

Функция  $f(x, \beta)$  может быть непрерывной, или претерпеть разрыв первого рода вдоль линии  $\beta_1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\beta_1) f(x, \beta) &= \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 - 0) f(x, \beta) + \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 + 0) f(x, \beta) = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 - 0) f(x, \beta_1 - 0) = \frac{1}{2} \Gamma^{(1)}(\beta_1 + 0) f(x, \beta_1 + 0). \end{aligned} \quad (3')$$

Это условие будем просто записывать так:

$$\Gamma^{(1)}(\beta_1) f(x, \beta) = \Gamma^{(1)}(\beta_1) f(x, \beta_1) \quad (3)$$

поскольку в дальнейшем соблюдение (3) автоматически приводит к соблюдению (3').

Дифференциальные уравнения тонких оболочек положительной Гауссовой кривизны технической теории В. З. Власова для нормальной нагрузки  $Z$ , при коэффициентах первой квадратичной формы, принимаемых нами  $A(x, \beta) = B(x, \beta) = 1$  имеют вид<sup>(2)</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( k_1 \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \\ D \nabla^4 w &= - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + Z. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть по линиям  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  имеют место углы перелома  $\gamma_1 = \text{const}$  и  $\gamma_2 = \text{const}$ .

Тогда в дифференциальных уравнениях следует взамен  $k_1$  и  $k_2$  рассмотреть обобщенные кривизны (1).

Учитывая (1) и (3), получим взамен (4)\*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( k_1 \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \Gamma^{(1)}(\beta_1) \gamma_2 \frac{\partial^2 w(x, \beta_1)}{\partial \alpha^2} \\ &\quad - \Gamma^{(1)}(\alpha_1) \gamma_1 \frac{\partial^2 w(\alpha_1, \beta)}{\partial \beta^2}, \\ D \nabla^4 w &= - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - \Gamma^{(1)}(\beta_1) \gamma_2 \frac{\partial^2 \Phi(x, \beta_1)}{\partial \alpha^2} \\ &\quad - \Gamma^{(1)}(\alpha_1) \gamma_1 \frac{\partial^2 \Phi(\alpha_1, \beta)}{\partial \beta^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (5) являются основными. При большем количестве линий излома добавляются аналогичным образом дополнительные члены.

\* Для простоты записи символ контурной производной мы опускаем.

Дадим несколько конкретных примеров. Для цилиндрической оболочки, показанной на фиг. 2 а, имеем:

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi = \frac{1}{R(\beta)} \frac{\partial^2 w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} + \Gamma^{(1)}(\beta_1) \gamma \frac{\partial^2 w(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha^2},$$

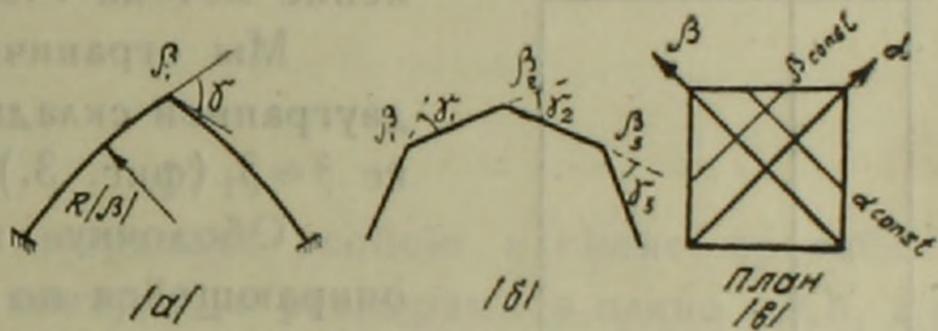
$$D \nabla^4 w = - \frac{1}{R(\beta)} \frac{\partial^2 \Phi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} - \Gamma^{(1)}(\beta_1) \gamma \frac{\partial^2 \Phi(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha^2} + Z. \quad (6)$$

Для складчатой системы показанной на фиг. 2 б, независимо от числа граней имеем опять-таки два уравнения:

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi = \sum_i \Gamma^{(1)}(\beta_i) \gamma_i \frac{\partial^2 w(\alpha, \beta_i)}{\partial \alpha^2},$$

$$D \nabla^4 w = - \sum_i \Gamma^{(1)}(\beta_i) \gamma_i \frac{\partial^2 \Phi(\alpha, \beta_i)}{\partial \alpha^2} + Z. \quad (7)$$

Для шатрового перекрытия, представляющего из себя пирамиду с квадратным основанием, поскольку вершина пирамиды является поправимой точкой разрыва и не приносит поэтому дополнительных особенностей, имеем:



Фиг. 2.

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi = - \Gamma^{(1)}(\alpha=0) \gamma \frac{\partial^2 w(0, \beta)}{\partial \beta^2} + \Gamma^{(1)}(\beta=0) \gamma \frac{\partial^2 w(\alpha, 0)}{\partial \alpha^2},$$

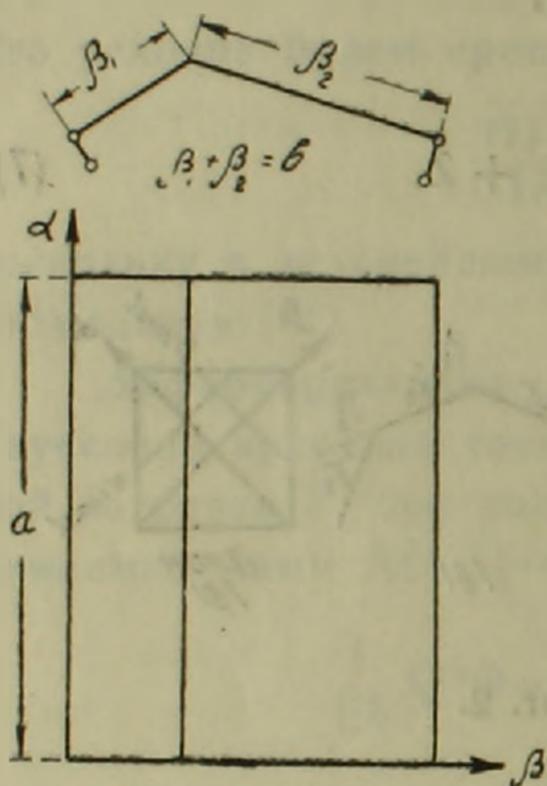
$$D \nabla^4 w = - \Gamma^{(1)}(\alpha=0) \gamma \frac{\partial^2 \Phi(0, \beta)}{\partial \beta^2} - \Gamma^{(1)}(\beta=0) \gamma \frac{\partial^2 \Phi(\alpha, 0)}{\partial \alpha^2} + Z. \quad (8)$$

Несколько слов о точности полученных результатов. Поскольку теория тонких оболочек справедлива при  $\frac{\delta}{R} < \frac{1}{30}$ , то ясно, что принятый переход к пределу, при  $R \rightarrow 0$  условен и должен давать некоторую погрешность, увеличивающуюся в окрестности линии излома.\*

Практически некоторые неточности вдоль линии контакта, кстати всегда неизбежные в той или иной мере при любой теории, не должны нас беспокоить, поскольку с физической точки зрения чем больше толщина оболочки, тем фиктивнее эта линия излома. По существу имеет место более или менее гладкое сопряжение отдельных участков поверхностей помощью переходных дуг повышенной кривизны, участки которых обычно усилиются теми или иными мерами. С точки зрения расчетной операции предельного перехода здесь данные сильно упрощают задачу и, полагаем, должны получаться удовлетворительные ре-

\* Оценка погрешности принципиально возможна, но потребует специального исследования.

Результаты при оболочках уже относительно малых пролетов. Мы можем это иллюстрировать на более простом примере изгиба балки, на малом участке которого приложена концентрированная сплошная нагрузка. Сведением этой нагрузки к сосредоточенной силе мы облегчаем решение задачи о прогибе балки. В применении к оболочке этот же прием замены концентрированной кривизны в полосах вдоль некоторых линий, сосредоточенным фактором (угол перелома  $\gamma$  с нашей точки зрения есть сосредоточенная кривизна), решение задачи неизмеримо облегчается.



Фиг. 3.

Само решение может осуществляться любыми методами математической физики;— следует соблюдать лишь линейность операций (например, введение функций Грина для  $w$  и  $\Phi$ , разложение в двойные ряды, применение метода Морис—Леви и т. д.).

Мы ограничимся простейшим примером двугранной складки с углом перелома  $\gamma$  в точке  $\beta = \beta_1$  (фиг. 3.)

Оболочку эту предполагаем свободно опирающейся по торцам ( $\alpha = 0$  и  $\alpha = a$ ) и радиально опирающейся по образующим  $\beta = 0$  и  $\beta = b$ . Дифференциальные уравнения для данного случая получим из (7) при  $i = 1$ .

Примем в соответствии с заданными граничными условиями

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} S_{m\alpha} S_{n\beta},$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} S_{m\alpha} S_{n\beta},$$

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} S_{m\alpha} S_{n\beta},$$

(8)

где  $S_{m\alpha} = \sin \frac{m\pi\alpha}{a}$ ,  $S_{n\beta} = \sin \frac{n\pi\beta}{b}$ .

Импульсивную функцию  $\Gamma^{(1)}(\beta_1)$  разложим в следующий тригонометрический ряд:

$$\Gamma^{(1)}(\beta_1) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} S_{n\beta_1} S_{n\beta}.$$

Подставляя всё это в (7) и сравнивая коэффициенты при  $S_{m\alpha} S_{n\beta}$ , получим систему уравнений:

$$A_{mn} = - \frac{m^2 S_{n\beta_1}}{(m^2 + \gamma^2 \Gamma^2)^2} A \sum_{i=1}^{\infty} B_{mi} S_{i\beta_1},$$

(9)

$$V_{mn} = \frac{m^2 S_{n\beta_1}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} B \sum_{i=1}^{\infty} A_{mi} S_{i\beta_1} + \frac{C a_{mn}}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2}, \quad (10)$$

где  $A = \frac{2a^2 \gamma E \delta}{\pi^2 b}$ ,  $B = \frac{2\gamma a^2}{b D \pi^2}$ ,  $C = \frac{a^4}{\pi^4 D}$ ,  $\lambda = \frac{a}{b} > 1$ .

Решение этой системы уравнений, и притом единственное, имеет вид:

$$A_{mn} = - \frac{m^2 S_{n\beta_1} A F(m)}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2 [1 + m^4 A B G^2(m)]}, \quad (11)$$

$$B_{mn} = - \frac{m^4 A B G(m) F(m) S_{n\beta_1}}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2 [1 + m^4 A B G^2(m)]} + \frac{C a_{mn}}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2}, \quad (12)$$

где  $G(m) = \sum_i \frac{S_{i\beta_1}^2}{(m^2 + i^2 \lambda^2)^2}$

$$F(m) = C \sum_i \frac{a_{mi} S_{i\beta_1}}{(m^2 + i^2 \lambda^2)^2}.$$

Второй член для  $V_{mn}$  выражает собою элемент прогиба для плиты свободно опертой по контуру, с размерами в плане  $a \times b$ , а первый член представляет собою поправочный член, учитывающий возмущающее влияние на работу плиты угла излома  $\gamma$ , и обращающийся в нуль вместе с  $\gamma$ .

Силы и моменты вычисляются обычным путем. Отметим, что метод Морис—Леви, при неизвестных функциях  $f_i(\beta)$ , должен привести к более быстро сходящимся результатам.

Приношу глубокую благодарность С. А. Амбарцумяну, ознакомившемуся с основной рукописью и давшему ценные замечания.

Институт строительных  
материалов и сооружений  
Академии Наук Армянской ССР  
Ереван, 1948, май.

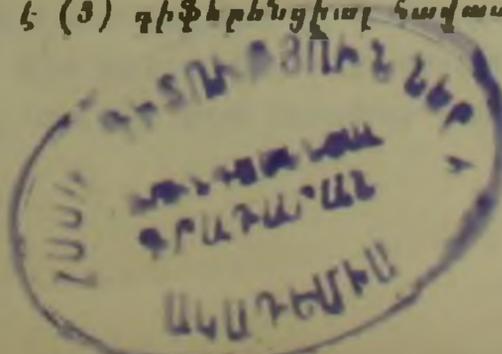
#### Ա. Գ. ՆԱԶԱՐԾԱՆ

#### Թաղանթների սեռության մի բաժնի կոնտակտային խնդիրներ

Մենք ուսումնասիրում ենք այնպիսի թաղանթներ, որոնց միջին մակերևույթն ունի խզումներ, որոնք համընկնում են  $\alpha, \beta$  կորությունների հետ, բայց  $K_1$  և  $K_2$  կորությունները անխզիլ են: Խզման  $\gamma$  անկյունները դիտում ենք որպես գծով բաշխված իմ-

պուլսիվ կորություններ  $\Gamma^{(1)}(\beta_1) \gamma(\alpha)$  և  $\Gamma^{(1)}(\alpha_1) \gamma(\beta)$ :

Օգտագործելով դրական կորություն ունեցող թաղանթների Վ. Զ. Վլասովի տեխնիկական տեսության հիմնական հավասարումները (4), այնուհետև  $K_1$  և  $K_2$  կորությունների փոխարեն տեղադրելով ընդհանրացրած կորությունները (1), խզված մակերևույթով թաղանթների լուծումը բերվում է (3) գիջերենցիալ հավասարումների սխեմային:



Այդ հիմնական սխտեմից, որպես մասնակի դեպքեր, կարելի է ստանալ 2-րդ գծագրում բերված թաղանթների հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմները (6), (7) և (8)։

Ստացված հավասարումների ճշտութունն այնպիսին է, ինչպիսին թաղանթների տեխնիկական տեսութայն Վ. Զ. Վլասովի հավասարումների ճշտութունը։ Այստեղ անհրաժեշտ է նշել, որ խզման գծերի շրջակայքում խնդրի ճշտութունը նվազում է, քանի որ խզման գծի երկայնքով ընդունված է  $R \rightarrow 0$  անցումը, իսկ թաղանթների տեխնիկական տեսութունն իրավացի է, երբ  $\frac{\delta}{R} < \frac{1}{30}$ , բայց ճշտության այդ նվազումը մեզ չպետք է անհանգստացնի, քանի որ խզման գիծը ֆիկտիվ է և իրականում թաղանթի հաստութայն առկայութայն դեպքում երկրաչափական խզման գիծ չենք ստանում, այլ ստանում ենք այս կամ այն չափով հարթ անցում։

Ստացված (5) դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմը լուծում ենք մաթեմատիկական ֆիզիկայի հայտնի մեթոդներով, միայն խնդրի լուծման ժամանակ անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ բոլոր օպերացիաները պետք է գծային լինեն։

Տեսութունը պարզաբանելու համար սերված է պարագծով ազատ հենված երկնիստ թաղանթի լուծումը, երբ այն բռնավորված է մակերևույթին նորմալ, խնդիրը լուծվում է կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով (8) այնպես, ինչպես նախկին լուծում

է ուղղանկյուն սալերի խնդիրը, խնդրի լուծման ժամանակ  $\Gamma^{(1)}$  իմպուլսիվ ֆունկցիայի հետ կատարում ենք բոլոր այն օպերացիաները, ինչ որ արտաքին բռնան հետ։

Վերջնական լուծումն ստացվում է բավականին լավ զուգամիտվող կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով։

Նշվում է, որ Մորիս—Լեվիի մեթոդի կիրառման դեպքում խնդիրը բերվում է ավելի արագ զուգամիտվող արդյունքների։

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. Г. Назаров. ДАН Армянской ССР, 8, № 3, 1948. 2. А. Г. Назаров. ДАН Армянской ССР, 7, № 1, 1947 и 7, № 4, 1947. 3. В. З. Власов. Прикладн. мат. и мех., 8, в. 2, 1944.