

МАТЕМАТИКА

Г. А. Амбарцумян

Задача Пуассона для двух событий и ее приложения

(Представлено В. А. Амбарцумяном 12 VI 1948)

1. Пусть производится N независимых испытаний, при каждом из которых вероятность события A равна p_1 , а вероятность события A_2 равна p_2 . Тогда, если события A_1 и A_2 несовместимы, то вероятность того, что A_1 произойдет n_1 раз, а A_2 произойдет n_2 раз, будет:

$$P(n_1, n_2) = C_N^{n_1} C_{N-n_1}^{n_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} (1-p_1-p_2)^{N-n_1-n_2} \quad (1)$$

Если N стремится к бесконечности, так что величины

$$v_1 = E(n_1) = p_1 N; \quad v_2 = E(n_2) = p_2 N^*$$

остаются конечными, то $P(n_1, n_2)$ стремится к определенному пределу:

$$\overline{P(n_1, n_2)} = e^{-v_1} \frac{v_1^{n_1}}{n_1!} e^{-v_2} \frac{v_2^{n_2}}{n_2!} \quad (2)$$

Следовательно, при этих условиях величины n_1 и n_2 являются независимыми.

2. При этих же условиях, если события A_1 и A_2 уже не являются несовместимыми, причем вероятность совместного их осуществления при каждом испытании есть

$$P(A_1 \text{ и } A_2) = p_{12} = p_1 \beta_1 = p_2 \beta_2,$$

то ту же вероятность $P(n_1, n_2)$ того, что при N испытаниях событие A_1 осуществится n_1 раз, а событие A_2 осуществится n_2 раз, можно получить следующим образом. Событие, состоящее в n_1 -кратном появлении события A_1 и n_2 -кратном появлении события A_2 , состоит в совместном осуществлении следующих трех событий: в k -кратном осуществлении события A_1 и A_2 , в n_1-k -кратном осуществлении события A_1 и $\bar{A}_2$ и в n_2-k -кратном осуществлении события A_2 и $\bar{A}_1$ при любом целом k , удовлетворяющем неравенству:

$$0 \leq k \leq n_0,$$

* Обозначение $E(x)$ означает математическое ожидание величины x и $P(A)$ в дальнейшем будет обозначать вероятность события A .

где n_0 наименьшее из чисел n_1 и n_2 . Поэтому, применяя теоремы умножения и сложения вероятностей, получим:

$$P(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{n_0} C_N^k C_{N-k}^{n_1-k} C_{N-n_1}^{n_2-k} p_1^k [p_1(1-\beta_1)]^{n_1-k} [p_2(1-\beta_2)]^{n_2-k} \cdot (1-p_1-p_2+p_2\beta_2)^N \quad (3)$$

Если $N \rightarrow \infty$, так что величины

$$v_1 = p_1 N; \quad v_2 = p_2 N$$

остаются конечными, то существует предел

$$P(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{e^{-v_1\beta_1 - v_1(1-\beta_1) - v_2(1-\beta_2)} (v_1\beta_1)^k [v_1(1-\beta_1)]^{n_1-k} [v_2(1-\beta_2)]^{n_2-k}}{k! (n_1-k)! (n_2-k)!} \quad (4)$$

3. Пользуясь полученными результатами, можно считать, что при $N \rightarrow \infty$, величины n_1 и n_2-k , n_2 и n_1-k , n_1-k и k , наконец, n_2-k и k являются величинами попарно независимыми. Это позволяет сразу установить коэффициент корреляции между n_1 и n_2 . А именно:

$$E(n_1, n_2) = E n_1 [k + (n_2 - k)] = E(n_1 k) + E(n_1) E(n_2 - k),$$

где

$$E(n_1, k) = E k [k + (n_1 - k)] = E(k^2) + E(k) \cdot E(n_1 - k)$$

и следовательно

$$E(n_1, n_2) = E(k^2) - [E(k)]^2 + E(n_1) \cdot E(n_2).$$

Отсюда

$$R = \frac{E(n_1, n_2) - E(n_1) \cdot E(n_2)}{\sqrt{v_1 v_2}} = \frac{\beta_1 v_1}{\sqrt{v_1 v_2}} = \sqrt{\beta_1 \beta_2} \quad (5)$$

4. Пользуясь обобщением теоремы Ляпунова для двух рядов независимых случайных величин⁽¹⁾, устанавливается, что величины n_1 и n_2 в пределе при $v_1 \rightarrow \infty$ и $v_2 \rightarrow \infty$ связаны нормальной корреляцией с коэффициентом корреляции $R = \sqrt{\beta_1 \beta_2}$, т. е. вероятность совместного осуществления неравенств

$$\frac{n_1 - v_1}{\sqrt{v_1}} < x \quad \text{и} \quad \frac{n_2 - v_2}{\sqrt{v_2}} < y$$

стремится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\beta_1\beta_2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2(1-\beta_1\beta_2)}(u^2 + v^2 - 2\sqrt{\beta_1\beta_2}uv)} du dv. \quad (6)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $v_1 \rightarrow \infty$ и $v_2 \rightarrow \infty$ независимыми являются следующие линейные комбинации:

$$n_1 - v_1 \text{ и } n_2 - v_2 - \beta_1(n_1 - v_1)$$

и

$$n_2 - v_2 \text{ и } n_1 - v_1 - \beta_2(n_2 - v_2).$$

5. Из полученных формул ясно, что закон распределения величин n_1 и n_2 при $N \rightarrow \infty$, как при постоянных v_1 и v_2 , так и при $v_1 \rightarrow \infty$ и $v_2 \rightarrow \infty$ вполне определяется величинами β_1 и β_2 , где

$$\beta_1 = P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \text{ и } A_2)}{P(A_1)}; \quad \beta_2 = P_{A_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \text{ и } A_2)}{P(A_2)}$$

Задача 1. На область S плоскости, внутри которой находится прямоугольник со сторонами h и d , бросаются N отрезков одинаковой длины b каждый. Пусть N и S стремятся к бесконечности так, что

$$\lim \frac{N}{S} = a,$$

величины же b и d остаются неизменными. Какова в пределе вероятность того, что одна из сторон длины h будет пересечена n_1 , а противоположная сторона n_2 падающими отрезками, если распределение вероятностей для координат середин отрезков в S является равномерным?

Здесь

$$v_1 = v_2 = v = \frac{2bh}{\pi} a.$$

После кропотливых вычислений, получается:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0 \quad \text{при } d > b$$

и

$$\beta = \sqrt{1 - (1-e)^2} - (1-e)^2 \arccos(1-e) - \\ - \frac{b}{h} [(1-e^2) \ln(1-e) + e(1-e)]$$

при

$$0 \leq d \leq b,$$

где

$$e = \frac{b-d}{b}.$$

Подставляя найденные β и v в формулы (4.) и (6), получим искомые вероятности.

Задача 2. На область S плоскости, внутри которой находятся два отрезка длины h , исходящие из одной точки и образующие угол ψ , бросаются N отрезков одинаковой длины b каждый. Пусть N и S стремятся к бесконечности так, что

$$\lim \frac{N}{S} = a,$$

величины же b и d остаются неизменными. Какова будет в пределе вероятность того, что один из данных отрезков будет пересечен p_1 , а другой p_2 падающими отрезками, если распределение вероятностей для координат середин отрезков в S является равномерным? Также, как и в первой задаче:

$$v_1 = v_2 = v = \frac{2bh}{\pi} \alpha.$$

После очень громоздких вычислений получается:

$$\beta = \frac{b}{8h} \left(\frac{5}{4} \pi \operatorname{ctg} \psi - 4\psi \operatorname{ctg} \psi - \frac{\pi^2}{8} + \pi\psi - 2\psi^2 - \frac{1}{2} \pi \sin 2\psi + \sin^2 \psi + \frac{7}{2} \right)$$

при

$$2 \arctg \frac{b}{2h} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$$

и

$$\beta = \frac{b}{8h} \left(\frac{\pi^2}{4} + 4 - 3\psi \operatorname{ctg} \psi - \pi\psi + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \psi \right)$$

при

$$\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

В частности при $\psi = \frac{\pi}{4}$, если $\frac{b}{2h} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, имеем

$$\beta = \frac{b}{8h} \left(4 - \frac{1}{4} \pi \right),$$

а при $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$\beta = \frac{b}{8h} \left(4 - \frac{1}{4} \pi^2 \right).$$

Подставляя значения β и v в формулы (4) и (6), получаются искомые вероятности.

Ереванский Политехнический

Институт им. К. Маркса

Ереван, 1948, май.

Գ. Ն. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Պատասխանի խնդիրը երկու պատահաբանների համար ելի նրա կիրառությունները

Ենթադրենք կատարվում է N անկախ փորձ և յուրաքանչյուր փորձի մասնակի հաշանի են A_1 և A_2 պատահաբանների P_1 և P_2 հավանականությունները, իսկ A_1 և A_2 պատահաբանները անհամատեղելի են և

$$v_1 = p_1 N, \quad v_2 = p_2 N$$

մեծությունները մնում են հաստատուն, ապա $N \rightarrow \infty$ դեպքում A_1 պատահարը n_1 անգամ, իսկ A_2 պատահարը n_2 անգամ տեղի ունենալու հավանականություն սահմանային արժեքը կլինի՝

$$P(n_1, n_2) = e^{-v_1} \frac{v_1^{n_1}}{n_1!} e^{-v_2} \frac{v_2^{n_2}}{n_2!}.$$

Այն դեպքում, երբ A_1 և A_2 պատահարները համատեղելի են, նույն հավանականություն սահմանային արժեքը կլինի՝

$$P(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{e^{-v_1\beta_1 - v_1(1-\beta_1) - v_2(1-\beta_2)} (v_1\beta_1)^k [v_1(1-\beta_1)]^{n_1-k} [v_2(1-\beta_2)]^{n_2-k}}{k! (n_1-k)! (n_2-k)!},$$

որտեղ β_1 և β_2 ներկայացնում են համապատասխանաբար A_1 և A_2 պատահարների պայմանական հավանականությունները, իսկ $n_0 = \min \{n_1, n_2\}$.

Միևնույն պայմաններում n_1 և n_2 մեծությունների կորրելացիայի գործակիցը կլինի՝

$$R = \sqrt{\beta_1\beta_2}.$$

Օգտագործելով Լյապունովի ընդհանրացված թեորեմը, ցույց է տրվում, որ երբ v_1 և v_2 ձգտում են անսահմանություն, n_1 և n_2 մեծությունները սահմանում ենթարկվում են նորմալ կորրելացիայի բաշխման օրենքին, այսինքն՝

$$\frac{n_1 - v_1}{\sqrt{v_1}} < x \text{ և } \frac{n_2 - v_2}{\sqrt{v_2}} < y$$

անհավասարությունների տեղի ունենալու հավանականությունը ձգտում է հետևյալ ֆունկցիային՝

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\beta_1\beta_2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2+v^2-2\sqrt{\beta_1\beta_2}uv}{2(1-\beta_1\beta_2)}} du dv.$$

Խնդիր 1. Հարթության S մակերես ունեցող տիրույթի վրա, որի մեջ գտնվում է h և d էջերով ուղղանկյուն քառանկյունը, դրվում են N հատ միևնույն b երկարության հատվածներ: N և S մեծությունները ձգտում են անվերջության, այնպես որ

$$\lim \frac{N}{S} = a,$$

իսկ h և d մեծությունները մնում են հաստատուն: Ինչի է հավասար սահմանում հավանականությունը, որ h երկարությունով էջը կհատվի n_1 հատվածներով, իսկ ղիմացի էջը՝ n_2 հատվածներով, եթե հատվածների միջնակետերի կորդինատները բաշխված են հավասարաչափ S -ի մեջ: Այդ հավանականությունն ստացվում է (1) և (2) բանաձևերից, որտեղ պարամետրներն ունեն հետևյալ արժեքները՝

$$v_1 = v_2 = v = \frac{2bh}{\pi} a$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0, \text{ եթե } d \geq b$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \sqrt{1-(1-e)^2} - (1-e)^2 \arccos(1-e) - \frac{b}{h} [(1-e^2) \ln(1-e) + e(1-e)],$$

եթե

$$0 < d < b,$$

որտեղ

$$e = \frac{b-d}{b}.$$

Խնդիր 11. Հարթության S մակերեսն ունեցող տիրույթի վրա, որի մեջ գտնվում է մի փափուկ լի էջերով, գտնվում են N միկնային b երկարության հատվածները N և S մեծությունները ձգտում են անվերջություն, այնպես որ՝

$$\lim \frac{N}{S} = a.$$

Ինչի է հավասար սահմանում հավանականությունը, որ անկյան էջերից մեկը կհատվի Π_1 , իսկ մյուսը Π_2 հատվածներով, եթե հատվածների միջնակետերի կոորդինատները հավասարաչափ են բաշխված S -ի մեջ, Այս դեպքում

$$v_1 = v_2 = v = \frac{2bh}{\pi} a$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{b}{8h} \left(\frac{5}{4} \pi \operatorname{ctg} \psi - 4 \psi \operatorname{ctg} \psi - \frac{\pi^2}{8} + \pi \psi - 2 \psi^2 - \frac{1}{2} \pi \sin 2\psi + \sin^2 \psi + \frac{7}{2} \right),$$

եթե

$$2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2h} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$$

և

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{b}{8h} \left(\frac{\pi^2}{4} + 4 - 3 \psi \operatorname{ctg} \psi - \pi \psi + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \psi \right)$$

եթե

$$\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А. Я. Хинчин. Асимптотические законы теории вероятностей.