ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
IX 1948 1

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян, действ. чл. АН Армянской ССР

Об одном квази-аналитическом классе функций

(Представлено 10 IV 1948)

Квази-аналитические классы функций были введены Э. Борелем в области комплексного аргумента [ср., напр., ([1])].

Решив одну задачу Адамара ([2]), Данжуа и Карлеман, а впоследствии и другие ([3,4,5]), ввели также квази-аналитические классы вещественных функций. Квази-аналитические классы недиференцируемых функций введены акад. С. Н. Бернштейном.

В настоящей заметке мы определяем некоторый квази-аналитический класс, весьма простой по структуре и легко обозримый по объему.

Пусть B_1 и B_2 две жордановые области со спрямляемыми границами C_1 и C_2, имеющими одну общую точку A, на плоскости комплексного аргумента $z=x+iy$. Отобразим конформно B_1 и B_2 соответственно на левую и правую полуплоскости комплексного аргумента $w=t+i\sigma$ так, чтобы точка A отображалась в обоих случаях в $w=\infty$. Граничные точки областей B_1 и B_2, соответствующие значению $w=\sigma$, обозначим через $z_1(\sigma)$ и $z_2(\sigma)$ и будем называть сопряженными точками.

Обозначим через $f(z)$ функцию, регулярную в открытой совокупности B_1+B_2; $f_1(z)$ - элемент этой функции в B_1, а $f_2(z)$ в B_2. Предполагаем далее, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ таковы, что субгармонические функции $\lg^+ |f_1(z)|$ и $\lg^+ |f_2(z)|$ допускают наименьшие гармонические мажоранты соответственно в B_1 и B_2. В этом случае, как известно [([6]) стр. 79—84] функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют почти везде граничные значения по некасательным путям и интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lg |f_1[z_1(\sigma)]| \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} \quad \text{и}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lg |f_2[z_2(\sigma)]| \frac{d\sigma}{1+\sigma^2}$$

существуют,* если только соответствующие функции $f_1(z)$ либо $f_2(z)$ не обращаются тождественно в нуль.

Утверждаем, что класс функций, для которых соответствующие элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют в сопряженных точках $z_1(\sigma)$ и $z_2(\sigma)$ достаточно „близкие" значения, составляет квази-аналитический класс.

Теорема 1. Если $\{f(z)\}$ *вышеописанный класс функций, удовлетворяющий дополнительному условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln | f_1[z_1(\sigma)] - f_2[z_2(\sigma)] | \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = -\infty, \tag{1}$$

то класс $\{f(z)\}$ *квази-аналитический.*

В самом деле, из обращения элемента $f_1(z)$ в тождественный нуль следует из (1), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln | f_2[z_2(\sigma)] | \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = -\infty.$$

А это показывает, что $f_2 \equiv 0$ [см. ([6]), стр. 79—84].

Но возникает некоторое сомнение—не следует ли из предыдущих условий, что $f_1(z)$ является аналитическим продолжением элемента $f_2(z)$. Если это было бы так—все предыдущее было бы тривиально.

Мы докажем нетривиальность теоремы 1, построив функцию $f(z)$, удовлетворяющую всем вышеуказанным условиям и такую, что границы областей B_1 и B_2 являются для элементов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ купюрами.

Для этого предварительно докажем, что *можно построить в* $|z^*| \leqslant 1$ *такой интеграл типа Коши*

$$F_1(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{\psi(\vartheta)\, de^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta} - z^*}, \tag{2}$$

чтобы функция плотности $\psi(\vartheta)$ *удовлетворяла условию*

$$\int_0^{2\pi} \ln | \psi(\vartheta) | \, d\vartheta = -\infty \tag{3}$$

и $F_1(z^*)$ *разлагалась бы в круге* $|z^*| < 1$ *в лакунарный ряд*

$$F_1(z^*) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} z^{*n_k}, \tag{4}$$

где

$$\lim (n_{k+1} - n_k) = \infty. \tag{5}$$

* В книге И. И. Привалова ([6]) соответствующие результаты сформулированы для круга, но легко их записать для полуплоскости.

Разлагая в ряд интеграл (2), получим

$$F_1(z^*) = \Sigma z^{*n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \psi(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta.$$

Отсюда следует, что для справедливости (2)—(5) достаточно построить суммируемую в $(0,2\pi)$ функцию $\psi(\vartheta)$, удовлетворяющую условию (3) и имеющую ряд Фурье с лакунами типа (5).

Существование такой функции следует из одного построения Б. Левина и М. Лившица [(7), стр. 698—700].

Таким образом, предыдущее утверждение можно считать доказанным. С другой стороны, Н. Винером установлено (8), что лакунарный степенной ряд (4), при условии (5) имеет единичную окружность в качестве купюры.

Интеграл (2) представляет в области $|z^*| > 1$ некоторую другую регулярную функцию $F_2(z^*)$, ряд которой тоже имеет лакуны (5). Следовательно $|z^*| = 1$ является купюрой и для $F_2(z^*)$.

Функции $F_1(z^*)$ и $F_2(z^*)$ принадлежат к классу H_p $(p < 1)$ Ф. Рисса [(6), стр. 98—102], а потому почти везде на $|z^*| = 1$ имеют предельные значения и $\lg^+ |F_1(z^*)|$ и $\lg^+ |F_2(z^*)|$ допускают наименьшие гармонические мажоранты. Почти везде на $|z^*| = 1$ [(6), стр. 142].

$$F_1(e^{i\vartheta}) - F_2(e^{i\vartheta}) = \psi(\vartheta).$$

Очевидно, отображая конформно $|z^*| < 1$ на B_1, а $|z^*| > 1$ на B_2, мы переведем $F_1(z^*)$ и $F_2(z^*)$ в функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, для которых выполняется условие (1), однако B_1 и B_2 являются областями существования для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

Сектор Математики и Механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, апрель.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Ֆունկցիաների քվազի-անալիտիկ մի դասի մասին

Դիցուք B_1 և B_2 երկու Ժորդանյան տիրույթներ են ուղղելի եզրագծերով, և վերջիններս ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ A։

Նշանակենք $f_1(z)$ և $f_2(z)$ երկու ֆունկցիաներ, որոնք հոլոմորֆ են B_1 և B_2 տիրույթներում և $\lg^+ |f_1(z)|$ ու $\lg^+ |f_2(z)|$ ունեն այդ տիրույթներում լավագույն հարմոնիկ մաժորանտներ։ Այդ պայմանների դեպքում $f_1(z)$ և $f_2(z)$ կունենան համարյա ամենուրեք եզրային արժեքներ։

Ապացուցվում է, որ եթե $f_1(z)$ և $f_2(z)$ ֆունկցիաների եզրային արժեքները A կետի շրջապատում բավականաչափ «մոտ» են, ապա այդպիսի հնարավոր զույգերը կազմում են քվազի-անալիտիկ դաս։

Որ այդպիսի դասի գոյությունը ակնհայտ չէ, հաստատվում է մի օրինակով. կառուցվում է այդ դասին պատկանող ֆունկցիաների մի զույգ, որոնց համար B_1 և B_2 գոյության տիրույթներն են, այսինքն՝ նրանցից դուրս $f_1(z)$ և $f_2(z)$ անալիտիկ շարունակելի չեն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *E. Borel.* Leçons sur les fonctions monogènes Uniformes, Paris, Gauthier-Villars, 1917. 2. *Hadamard.* La généralisation des fonctions analitiques. (Comptes Rendus des Séances de la Soc. Math. d. France, 1912). 3. *Denjoy.* Comptes Rendus de L'Ac. d. Sc. **173**, 1329, 1921. 4. *Carleman.* Les fonctions quasi-analytiques, Paris, Gauthier-Villars, 1926 5. *S. Mandelbrojt.* Séries de Fourier et classes quasi-analytiques, Paris, Gauthier-Villars, 1935. 6. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций, Москва, МГУ, 1941. 7. *Б. Левин* и *М. Лившиц.* Математ. Сборн., **9** (51), № 3, 693—709, 1941. 8. *N. Wiener.* Ann. Scuola Norm. Super., Pisa II, s. **3**, 367—372, 1934.