ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

VIII 1948 4

ФИЗИКА

М. А. Тер-Микаелян

Одномерный случай задачи о числе рассеяний при диффузии фотонов

(Представлено В. А. Амбарцумяном 3 III 1948)

В заметке В. А. Амбарцумяна (1) предложен общий метод решения задачи о числе рассеяний при диффузии света в рассеивающей среде. Мы применим этот метод к одномерной задаче, где решение всегда может быть представлено в явном виде.

Пусть на границу одномерной среды оптической толщины τ падает излучение интенсивности I_0. Отношение коэфициента рассеяния к сумме коэфициентов поглощения и рассеяния обозначим через λ и будем считать постоянным в среде. Зададим также „индикатрису" рассеяния X, т. е. долю света, рассеиваемого элементом $d\tau$ в направлении падения интенсивности. Нам известно (2), что интенсивность диффузно-отраженного излучения равна

$$I_2 = r_0 \frac{1-e^{-2k\tau}}{1-r_0^2 e^{-2k\tau}} I_0, \qquad (1)$$

а интенсивность диффузно-прошедшего излучения равна

$$I_1 = \frac{(1+r_0^2)e^{-k\tau}}{1-r_0^2 e^{-2k\tau}} I_0, \qquad (2)$$

где

$$k = \frac{\lambda}{2}(1-x)\frac{1-r_0^2}{r_0} \qquad (3)$$

$$r_0 = \frac{1-\lambda x}{\lambda(1-x)} - \sqrt{\frac{(1-\lambda x)^2}{\lambda^2(1-x)^2} - 1}\,. \qquad (4)$$

Будем исходить из следующих соображений (1). Интенсивность как диффузно-отраженного, так и прошедшего излучения может быть представлена в случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) в виде суммы $I = \Sigma I_n$, где I_n есть интенсивность, обусловленная фотонами, претерпевшими n рассеяний. Если же среда, кроме рассеяния, производит еще поглощение, то n-ый член этой суммы нужно умножить на вероятность „выжива-

ния" при n рассеяниях, т. е. на λ^n. Значит, в общем случае поглощающей и рассеивающей среды интенсивность и диффузно-отраженного и прошедшего света имеет вид

$$I = \Sigma I_n \lambda^n. \qquad (5)$$

Чтобы узнать долю, которую составляют в излучении кванты, претерпевшие n рассеяний, нужно n-ый член суммы (5) разделить на I. Обозначая эту долю через p_n, мы имеем

$$p_n = \lambda^n \frac{I_n}{I}. \qquad (6)$$

Среднее же число рассеяний очевидно равно

$$\overline{n} = \Sigma n p_n = \lambda \frac{d \log I}{d\lambda}. \qquad (7)$$

Таким образом, наша задача сводится к простому диференцированию по формуле (7).

Рассмотрим сначала случай одномерного слоя бесконечной оптической толщины. Из (1.) для диффузно-отраженного излучения мы имеем

$$I_2 = r_0 I_0. \qquad (8)$$

Учитывая (7), мы получим для среднего числа рассеяний квантов, диффузно-отраженных от слоя бесконечной оптической толщины,

$$\overline{n_2} = \lambda \frac{dI_n r_0}{d\lambda}, \qquad (9)$$

где r_0 дается формулой (4.). Формула (9) дает в частности в случае „сферической" индикатрисы $\left(x = \frac{1}{2} \right)$

$$\overline{n_2} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \qquad (10)$$

Переходим к слою конечной оптической толщины. Обозначим через $\overline{n_2}$ и $\overline{n_1}$ соответственно среднее число рассеяний, претерпеваемых диффузно-отраженными и прошедшими через среду квантами. По формуле (7) мы имеем

$$\overline{n_2} = \lambda \frac{d I_n I_2}{d\lambda}. \qquad (11)$$

$$\overline{n_1} = \lambda \frac{d I_n I_1}{d\lambda}, \qquad (12)$$

где I_1 и I_2 даются формулами (2) и (1). Диференцируя и производя простые преобразования, мы получим для случая $x = \frac{1}{2}$

$$\overline{n_2} = \frac{1}{k}\,\frac{1+r_0^2 e^{-2k\tau}}{1-r_0^2 e^{-2k\tau}} - \frac{\lambda\tau}{k}\,\frac{(1-r_0^2)}{\left(e^{2k\tau}-1\right)\left(1-r_0^2 e^{-2k\tau}\right)} \qquad (13)$$

$$\overline{n_1} = \frac{2r_0^2}{k}\,\frac{e^{-2k\tau}-1}{\left(1-r_0^2\right)\left(1-r_0^2 e^{-2k\tau}\right)} + \frac{\lambda\tau}{2k}\,\frac{1+r_0^2 e^{-2k\tau}}{1-r_0^2 e^{-2k\tau}}. \qquad (14)$$

При больших τ имеем следующие асимптотические формулы:

$$\overline{n_2} \cong \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \qquad (15)$$

$$\overline{n_2} \cong \frac{\lambda\tau}{2k} - \frac{2r_0^2}{k} = \frac{\lambda\tau - 4r_0^3}{\sqrt{1-\lambda}}. \qquad (16)$$

В случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) формулы (13) и (14) переходят в

$$\overline{n_2} = \frac{2\tau^3+6\tau+6}{3(2+\tau)} \qquad (17)$$

$$\overline{n_1} = \frac{\tau^3+6\tau^2+6\tau}{6(2+\tau)}. \qquad (18)$$

Приводим таблицу численных значений $\overline{n_2}$ и $\overline{n_1}$, полученных по формулам (13 и (14) для различных τ (0, 1, 2, 4, 8, 20, ∞) и различных λ (0,5; 0,8; 0,9; 1.).

τ \ λ	$\overline{n_1}$ 0.5	$\overline{n_1}$ 0.8	$\overline{n_1}$ 0.9	$\overline{n_1}$ 1.0	$\overline{n_2}$ 0.5	$\overline{n_2}$ 0.8	$\overline{n_2}$ 0.9	$\overline{n_2}$ 1.0
0	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.37	0.53	0.61	0 72	1.22	1.40	1.46	1.56
2	0.50	1.43	1.51	1.83	1,34	1.77	1.94	2.17
4	1.34	2.93	3.77	5.11	1.43	2.08	2.57	3.44
8	1.95	6.27	8,97	16,73	1.43	2.23	3.07	6.06
20	7.03	17,03	26.17	70.28	1.43	2.23	3.17	14.03
∞	∞	∞	∞	∞^5	1.43	2,23	3.17	∞

Из приведенных формул (15), (16.) видно, что число рассеяний при больших τ для диффузно-отраженного кванта всегда конечно, для прошедшего же кванта имеет порядок τ. В случае чистого рассеяния формулы (17, 18.) дают существенно иной результат. Именно при больших τ число рассеяний диффузно-отраженного кванта имеет порядок τ, а число рассеяний прошедшего—порядок τ^2. Последний вывод совпадает с результатом, который мы получили бы, рассматривая квант, как брауновскую частицу, диффундирующую в среде.

Заметим, что все полученные результаты могут быть выведены из других соображений. Именно, мы можем исходить из свойства ин-

вариантности $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_1$ относительно прибавления слоя $d\tau$ к одной границе и отнятия того же слоя $d\tau$ от другой. Эта инвариантность позволяет свести нахождение искомых функций $\bar{n}_2$ и $\bar{n}_1$ к решению простых диференциальных уравнений.

Заметим еще, что вместо внешнего освещения мы можем иметь внутренний источник света. Задача сводится к нахождению интенсивности света прошедшего в одну и в другую сторону. Решение очень просто, если исходить из формул (1) и (2).

Таким образом задача для одномерного слоя решается полностью. Напомним еще раз ([1]), что использованные нами значения коэфициентов диффузного отражения и пропускания были получены исходя только из граничных условий.

Кафедра Астрофизики Ереванского
Государственного Университета
им. В. М. Молотова
Ереван, 1948, февраль.

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Ֆոտոնների դիֆֆուզիայի ընթացքում կատարվող ցրումների թվի խնդրի միաչափ դեպքը

Վ. Հ. Համբարձումյանի հոդվածում ([1]) առաջադրված է պղտոր միջավայրում ֆոտոնի դիֆֆուզիայի ընթացքում կատարվող ցրումների թվի հաշվման ընդհանուր մեթոդը։

Ներկա հոդվածում տրվում է միաչափ խնդրի լուծումը բացահայտ ձևով։

Դիֆֆուզ անդրադարձված և անցած ճառագայթների ինտենսիվությունները հայտնի են Վ. Հ. Համբարձումյանի աշխատանքից ([2]) և տրվում են (1) և (2) բանաձևերով։ Դիֆֆուզ-անդրադարձած և անցած ֆոտոնի ցրումների միջին թվերը (համապատասխանաբար $\bar{n}_2$ և $\bar{n}_1$) ստացվում են (11) և (13) բանաձևերի օգնությամբ և ունեն (13) և (14) տեսքը։ Այդ բանաձևերի օգնությամբ հաշվված են n_1-ի և n_2-ի թվային արժեքները λ-ի և τ-ի մի քանի արժեքների համար։

Հետաքրքրական է մեծ τ-ի համար լուծումների ասիմպտոտական վարքը։ Կլանման առկայության դեպքում ($\lambda < 1$) դիֆֆուզ-անդրադարձած ֆոտոնի ցրումների թիվը վերջավոր է, անցածի համար ունի τ կարգ։ Կլանման բացակայության դեպքում ($\lambda = 1$) արդյունքը էապես փոխվում է։

Անդրադարձած ֆոտոնի ցրումների թիվը ունի τ կարգ, իսկ անցածինը՝ τ^2։ Վերջին արդյունքը համընկնում է Բրաունյան շարժման տեսությունից ստացվող արդյունքի հետ։

Նկատենք, որ դիֆֆուզ-անդրադարձման և անցման գործակիցներն ստանալիս օգտագործվել են միայն եզրային պայմանները ([2])։ Հետևաբար և մեր արդյունքները միջավայրի ներսում կատարվող ֆոտոնների ցրման թվերի մասին հենվում են միայն այդ պայմանների ուսումնասիրության վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* ДАН Армянской ССР, 8, № 3, 1948. 2. *В. А. Амбарцумян.* Изв. АН Армянской ССР (сер. естеств. наук), № 1—2, 1944.