ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
VIII 1948 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Диференциальные уравнения с импульсивными членами

(Представлено 25 XI 1947)

Пользуясь понятием о контурной производной [1,2], можно решать некоторые граничные и контактные задачи математической физики.

Рассмотрим, для простоты, неоднородное диференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэфициентами.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

при начальных условиях:

$$x = x_0;\ y = y_0,\ y' = y'_0, \dots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Выразим (1) в контурных производных, для чего вместо y условимся рассматривать $\Gamma(x-x_0)y$.

Тогда, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, вместо (1) получим:

$$a_0 [y]^{(n)} + a_1 [y]^{(n-1)} \dots + a_{n-1} [y]' + a_n y = a_0 y_0 \Gamma^{(n)}(x-x_0)$$
$$+ (a_0 y'_0 + a_1 y_0)\Gamma^{(n-1)}(x-x_0) + (a_0 y''_0 + a_1 y'_0 + a_2 y_0)\Gamma^{(n-2)}(x-x_0)$$
$$\dots + (a_0 y_0^{(n-1)} + a_1 y_0^{(n-2)} \dots + a_{n-1} y_0)\Gamma^{(1)}(x-x_0) + f(x). \tag{3}$$

Уравнение (3) заменяет собою (1) и (2). В нем наряду со свободным членом $f(x)$ входят на равных с ним началах импульсивные функции, характеризующие начальные условия. Причем свободный член $f(x)$ может включать в себе также некоторые импульсивные функции в соответствии с физической сущностью поставленной задачи. Нетрудно убедиться, что (3) может быть решено, если найдено решение для функции Грина

$$a_0 [S]^{(n)} + a_1 [S]^{(n-1)} \dots + a_{n-1} [S]' + a_n S = \Gamma^{(1)}(x). \tag{4}$$

Заметим сначала, что при замене $\overset{(1)}{\Gamma}(x)$ через $\overset{(1)}{\Gamma}(x-\xi)$ мы получим решение $S(x-\xi)$. Теперь, пользуясь линейностью (3), можем находить частные решения для каждого свободного члена, входящего в его правую часть, и затем полученные решения сложить. Найдем частное решение, соответствующее $f(x)$, т. е. в предположении нулевых начальных условий. Разобьем площадь, ограниченную функцией $f(x)$, на элементарные импульсы. Каждой элементарной импульсивной функции

$$\overset{(1)}{\Gamma}(x-\xi_i)\ f(\xi_i)\Delta\xi_i$$

удовлетворяет решение

$$S(x-\xi_i)\, f(\xi_i)\Delta\xi_i\,.$$

Следовательно, решение для $f(x)$

$$u_0(x;x_0)=\lim_{\Delta\xi_i\to 0}\sum_{x_0}^{x} S(x-\xi_i)\, f(\xi_i)\Delta\xi_i=\int_{x_0}^{x} S(x-\xi)\, f(\xi)\, d\xi\,. \tag{5}$$

Чтобы найти полное решение для (3), достаточно вместо $f(x)$ подставлять импульсивные функции различных порядков:

$$u_m(x;x_0)=\int_{x_0}^{x} S(x-\xi)\overset{(m)}{\Gamma}(\xi-x_0)\,d\xi=\overset{(m-1)}{S}(x-x_0). \tag{6}$$

Окончательно общее решение для (3) запишется теперь в виде:

$$y=a_0y_0\,u_n(x;x_0)+(a_0y'_0+a_1y_0)\,u_{n-1}(x;x_0)$$

$$\ldots+(a_0\overset{(n-1)}{y_0}+a_1\overset{(n-2)}{y_0}\ldots+a_{n-1}y_0)\,u_1(x;x_0)+u_0(x;x_0). \tag{7}$$

Уравнение (7) дает общее решение задачи при произвольных начальных условиях и, что самое главное, при $f(x)$, содержащем импульсивные функции различных порядков. Последнее обстоятельство не препятствует записи уравнения в виде единого выражения, благодаря наличию разрывных множителей $\Gamma(x-a_i)$, где $x=a_i$, точки приложения сосредоточенных факторов $A_i\overset{(k)}{\Gamma}(x-a_i)$.

Пользуясь понятием о контурной производной, можно решать некоторые контактные задачи математической физики путем ввода в соответствующие диференциальные уравнения импульсивных коэфициентов. Этой операцией устраняется необходимость членения уравнения на отдельные ветви, с обособленным рассмотрением условий контакта в месте их сопряжения. Сущность метода заключается в том, что рассматривается линейное диференциальное уравнение с переменными коэфициентами и путем преобразования последних получается диференциальное уравнение с импульсивными коэфициентами, отвечающими требованиям рассматриваемой контактной задачи. Величины импульсивных функций при этом неизвестны. Они определяются из системы линейных уравнений для одномерных задач и системы функциональных уравнений для двумерной задачи соответственно для точек или линий контакта. Сущность рассматриваемого метода проще всего пояснить на примере. Рассмотрим балку постоянного сечения, опирающуюся на упругую винклеровскую среду с коэфициентом постели k и кроме того в точках $x=a_i$, на упруго смещающиеся точечные опоры, с коэфициентами податливости K_i, представляющими смещение под действием единичных сил, приложенных к рассматриваемым опорам.

Диференциальное уравнение балки на упругом основании при переменном коэфициенте постели $k(x)$, запишется следующим образом:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+k(x)y=q. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что для поставленной задачи необходимо принять

$$k(x)=k+\Sigma\overset{(1)}{\Gamma}(x-a_i)K_i. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и имея ввиду, что теперь (8) должен рассматриваться в контурном смысле, а также, что

$$\overset{(1)}{\Gamma}(x-a_i)y(x)=\overset{(1)}{\Gamma}(x-a_i)y(a_i), \tag{10}$$

получим окончательно интересующее нас диференциальное уравнение с импульсивными коэфициентами:

$$EI\frac{d^4[y]}{dx^4}+ky=q(x)-\Sigma\overset{(1)}{\Gamma}(x-a_i)K_iy(a_i). \tag{11}$$

Граничные условия, для простоты, опущены. Здесь сплошную нагрузку также рассматриваем в обобщенном смысле.

В результате решения (11) мы получим $y(x)$ в зависимости от внешней нагрузки и неизвестных ординат $y(a_i)$. Приравняв в этом решении последовательно $x=a_1$, $x=a_2$ и т. д., мы получим систему линейных уравнений для определения $y(a_i)$, чем решение задачи доводится до конца.

Если в уравнении (11) приравнять $k=0$, то получим уравнение для балки опертой только на отдельные упругие опоры. Решение приведется к системе полиномов третьего порядка, связанных между собою разрывными множителями.

Этот прием может быть применен к решению задач о колебаниях упругих систем, несящих сплошную и сосредоточенные нагрузки, устойчивости стрежней заделанных в упругую среду с включением точечных упругих опор, рассмотрении задач электротехники, когда в цепи помимо непрерывно распределенных факторов, могут быть включены точечно сосредоточенные факторы в виде сопротивления, емкости или самоиндукции и так далее. Этот же способ можно применить и для многомерных задач с тем отличием, что в них будут фигурировать импульсивные функции более сложной природы ([3]).

Институт строительных
материалов и сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, ноябрь.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Իմպուլսիվ ածանցյալով դիֆերենցիալ հավասարումներ

Աշխատանքում բերվում է կոնտուրային ածանցյալներով արտահայտված գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մեթոդը։ Այդ մեթոդով հնարավոր է տալ կոմպակտ լուծումներ հայտնի սահմանային պայմանների առկայության դեպքում։ Դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մտցնելով համապատասխան ձևով ընտրված իմպուլսիվ գործակիցներ, հնարավոր է տալ մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք կոնտակտային խնդիրների լուծումները, առանց նախնական անջատումներ կատարելու հավասարումների մեջ, որոնք հետագայում միացվում են կոնտակտի կետերում։

ЛИТЕРАТУРА

1 *А. Г. Назаров*. Изв. АН Арм. ССР (сер. естеств. наук), № 6, 1946. 2. *А. Г. Назаров*. ДАН Арм. ССР, 7, № 4, 1947. 3. *А. Г. Назаров*. ДАН Арм. ССР, 8, № 1, 1948.