

ФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, действ. чл. АН Армянской ССР

О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде

(Представлено 21 II 1948)

Теория рассеяния света в мутной среде (т. е. в среде, где происходит как поглощение, так и рассеяние) разбирает стационарные задачи теории диффузии фотонов через среду. При этом в качестве основной задачи в теории рассеяния всегда ставился вопрос о вычислении интенсивности света в заданной точке и в заданном направлении. Вопрос же о статистике чисел рассеяний, испытанных квантами, входящими в состав того или иного пучка, обычно не ставился. Между тем оказывается возможным решить и этот вопрос, оставаясь в рамках стационарной задачи, т. е. без рассмотрения хода процесса во времени. Это решение и составляет цель настоящей заметки.

Рассматриваемая при этом проблема многократного рассеяния в мутной среде может носить весьма общий характер. Среда может занимать объем любой формы. Зависимость коэффициента рассеяния σ от координат в этом объеме может быть какой угодно. Точно также падающее извне излучение, заданное нам, может иметь любую зависимость от координат точек на границе среды и направления падения. Может быть задано также любое распределение источников фотонов. Даже индикатриса рассеяния может меняться от точки к точке. Единственное допущение, делаемое нами, заключается в том, что коэффициент поглощения κ пропорционален коэффициенту рассеяния и, что, следовательно, отношение

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa},$$

представляющее вероятность «выживания» фотона при элементарном акте взаимодействия его с частицами среды, есть величина постоянная.

Это отношение λ входит в уравнение переноса

$$\frac{1}{\sigma + \kappa} \frac{dI}{ds} = -I + \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\gamma, P) I d\omega + \frac{e}{4\pi}, \quad (1)$$

где I есть интенсивность излучения, $x(\gamma, P)$ есть индикатриса рассея-

ния, представляющая собою функцию как угла рассеяния χ , так и точки P , а ϵ — плотность источников.

При заданных предельных условиях решение уравнения (1) является функцией точки, направления и величины λ .

Очевидно, что интенсивность для любой точки и направления при $\lambda = 1$ (чистое рассеяние) может быть представлена в виде:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

где I_n есть интенсивность, обусловленная фотонами, претерпевшими n рассеяний.

В общем же случае $\lambda \neq 1$ очевидно, будем иметь

$$I(\lambda) = \sum \lambda^n I_n, \quad (2)$$

так как λ^n есть вероятность выживания фотона после n рассеяний.

Очевидно, что ряд (2) сходится в круге $|\lambda| \leq 1$.

Таким образом, достаточно взять n -ый член разложения I по степеням λ и разделить на I , чтобы узнать какую долю среди квантов, проходящих в данной точке и в данном направлении составляют кванты, претерпевшие n рассеяний. Иными словами, эта доля равна

$$P_n = \lambda^n \frac{I_n}{I}. \quad (3)$$

Отсюда нетрудно найти и среднее число рассеяний, приходящихся на один квант данного пучка. Оно равно

$$\bar{n} = \sum n p_n = \lambda \frac{\partial \log I}{\partial \lambda}. \quad (4)$$

Точно также можно найти среднее квадратичное отклонение по формуле

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2 = \frac{\lambda^2}{I} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} + \frac{\lambda \partial I}{I \partial \lambda} - \frac{\lambda^2}{I^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)^2 \\ &= \left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \log I. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) остаются в силе и в тех случаях, когда речь идет о числе рассеяний квантов, идущих не в одном направлении, а в совокупности каких-либо направлений. При этом в формулы вместо I войдут сумма или интеграл от интенсивностей по взятой совокупности направлений. Можно брать и взвешенные суммы.

В качестве примера возьмем один случай диффузного отражения света. На плоскую границу полубесконечной среды падает излучение по всем направлениям. Пусть интенсивность падающих лучей в каждом направлении пропорциональна секансу угла падения. Индикатриса рассеяния во всей среде сферическая.

Нас интересует среднее число рассеяний, испытанных световыми

квантами, входящими в полный поток диффузно отраженных фотонов, независимо от угла выхода.

Если мы введем функцию отражения $r(\eta, \xi)$ от косинусов ξ и η углов падения и отражения (1), то поскольку интенсивность света, падающего на границу в направлении ξ , будет $\frac{S}{\xi}$, где S постоянная, очевидно, что интенсивность света, отраженного в направлении η по определению $r(\eta, \xi)$ равна

$$I(\eta) = 2S \int r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (6)$$

Полный поток отраженных фотонов, выходящих по всем направлениям, будет

$$H = 2 \int I(\eta) \eta d\eta = 4\pi S \iint r(\eta, \xi) \frac{\eta}{\xi} d\eta d\xi. \quad (7)$$

Но при сферической индикатрисе рассеяния, как известно (2)

$$r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi}, \quad (8)$$

где функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\eta + \xi} d\xi. \quad (9)$$

Внося (8) в (7), находим

$$H = \lambda \pi S \iint \frac{\eta \varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi} d\eta d\xi. \quad (10)$$

Складывая (10) с таким же интегралом, в котором переменные интегрирования η и ξ заменены друг другом, получаем

$$2H = \lambda \pi S \left(\int \varphi(\eta) d\eta \right)^2 = \lambda \pi S A^2, \quad (11)$$

где A интеграл в скобках.

Интегрируя обе стороны уравнения (9) в пределах от нуля до единицы и совершая такое же преобразование, находим

$$A = 1 + \frac{\lambda}{4} A^2. \quad (12)$$

Поэтому

$$H = 2\pi S \frac{2 - \lambda - 2\sqrt{1 - \lambda}}{\lambda}. \quad (13)$$

Применяя формулу (4), мы найдем, что среднее число рассеяний, испытываемых квантами выходящего потока, равно

$$\bar{n} = \lambda \frac{\partial \log H}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (14)$$

Так, например, при $\lambda = 0,75$ имеем в среднем два рассеяния на один отраженный квант.

Однако, при $\lambda \rightarrow 1$ среднее число рассеяний стремится к бесконечности. Иными словами, при $\lambda = 1$ сумма (4) расходится, хотя ряд (2) сходится.

Впрочем, бесконечное в среднем число рассеяний при $\lambda = 1$ получается только в процессе диффузного отражения при бесконечной оптической толщине чисто рассеивающего слоя. При конечной толщине n конечно.

Заметим, наконец, что в случае бесконечного слоя

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1-\lambda)^{3/2}} \quad (15)$$

Примечательным является то, что формулы (8) и (9) были получены^(1,2) путем исследования условий в бесконечно-тонком слое на границе среды. Результаты (14) и (15) основаны на этих формулах. Таким образом оказалось возможным получить данные о числе рассеяний при диффузии фотонов, не рассматривая вовсе процессов внутри среды.

В следующем номере настоящего журнала будет опубликована статья М. Тер-Микаеляна, где выведено значение n для различных случаев одномерной задачи рассеяния света. Автор ее участвовал и в обсуждении настоящей работы.

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, февраль.

Վ. Ն. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ֆոտոնների ցրումների թիվը պզտոց միջավայրում կառավարվող դիֆուզիայի դեպքում

Պզտոց միջավայրում լույսի ցրման աեսությունը քննում է ֆոտոնների դիֆուզիայի աեսության ստացիոնար խնդիրները: Այդ խնդիրների նկատմամբ, սակայն, մինչև այժմ դրված չի եղել այս կամ այն փնջի մեջ մանող ֆոտոնների կողմից ապրած ցրումների թվի խնդիրը: Պարզվում է, որ այս վիճակագրական խնդիրը կարելի է լուծել ամենաընդհանուր դեպքի կամար:

Եթե γ -ն կազատար է ցրման և թուլացման գործակիցների կարաբերությանը, ապա փնջի ինտենսիվությունը յուրաքանչյուր կետում և ուղղությամբ կախված կլինի γ -ից: Չիտենալով այդ կախումը, մենք, կամաձայն (4)-ի, կարող ենք հաշվել փնջի մեջ մանող ֆոտոնների կողմից ապրած ցրումների միջին թիվը, իսկ կամաձայն (5)-ի՝ այդ ցրումների թվի գիտակրսիան:

Պարզվում է, որինակ, որ կարթ-զուգահեռ շերտերի դեպքում, երբ պզտոց միջավայրը զրավում է կիսաաարածություն, իսկ այդ միջավայրի սահմանի վրա գրեթե բոլոր

ուղղութիւններով ճառագայթներ են ընկնում, որոնց ինտենսիվութիւնը համեմատական է անկման անկյան սեկանսին, դիֆֆուզ կերպով անդրադարձվող ֆոտոնների կողմից ազդած սրումների միջին թիվը հավասար է

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$$

Ընդհանրապես մենք կարող ենք ինտենսիվութիւնը Մակլորենի շարքի վերածել ըստ λ -ի աստիճանների: Այն ժամանակ եթե l_n -ը λ^n -ի գործակիցն է, ապա հավանականութիւնը, որ տվյալ փնջի մեջ մտնող կվանտը ապրել է n սրում, արվում է (3)-ի միջոցով:

Հետաքրքիրն այն է, որ լույսի սրման բազմաթիվ խնդիրներ մինչև վերջը լուծվում են միայն սահմանային պայմանների սուսուսասիրութիւն միջոցով: Մասնավորապես՝ այդ մեթոդով կարելի է լուծել դիֆֆուզ անդրադարձման խնդիրը և ստանալ անդրադարձվող ճառագայթների ինտենսիվութիւնը: Հետեւաբար, (3) ի հիման վրա հնարավոր է նաև որոշել անդրադարձվող կվանտի կողմից ազդած սրումների այս կամ այն թվի հավանականութիւնը:

Այսպիսով ստացվում է, որ մենք կարող ենք եզրակացութիւններ անել դիֆֆուզիայի ժամանակ կատարվող սրումների թվի մասին, առանց միջավայրի ներսում տեղի ունեցող երեւոյթների քննարկման:

Այս հանգամանքը չափազանց ուշագրավ է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян. ЖЭТФ, 13, 324, 1948. 2. В. А. Амбарцумян, ДАН СССР, 38, 257, 1943.