ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

VIII 1948 1

ГИДРАВЛИКА

Н. А. Картвелишвили

Зависимость напора от времени при гидравлическом ударе

(Представлено И. В. Егиазаряном 28 IX 1947)

Рассматривая неустановившееся движение жидкости в трубопроводе с равномерно распределенными постоянными, будем исходить из цепного уравнения гидравлического удара Аллиеви:

$$B_{\tau-1} + B_{\tau} = \rho(u_{\tau-1} - u_{\tau}), \tag{1}$$

уравнения истечения через турбину (без учета влияния ее всасывающей трубы)

$$u = \alpha(1 + B)^{k} \tag{2}$$

и линейного закона изменения открытия регулирующих органов турбины

$$\alpha = \alpha_0 \pm \frac{\tau}{\theta} \tag{3}$$

В уравнениях 1—3:

$B = \dfrac{H - H_0}{H_0}$ —относительное изменение напора турбины,

H —динамический напор,

H_0 —статический напор,

$u = \dfrac{Q}{Q_0}$ —относительный расход турбины,

Q —абсолютный расход турбины,

Q_0 —расход турбины при $B = 0$, $\alpha = 1$,

τ —время, выраженное в фазах гидравлического удара μ,

α —открытие турбины,

α_0 —открытие в момент возникновения рассматриваемого неустановившегося режима,

$\rho = \dfrac{aQ_0}{g\omega H_0}$ —постоянная Аллиеви,

a —скорость распространения волн удара в трубопроводе,

ω — площадь его сечения,

$\Theta = \frac{T_s}{\mu}$ — относительное время действия регулятора турбины,

T_s — время действия регулятора турбины, необходимое для ее полного открытия (от $\alpha=0$ до $\alpha=1$) или полного закрытия (от $\alpha=1$ до $\alpha=0$).

В уравнении (3) и всюду ниже верхние знаки соответствуют открытию, а нижние закрытию турбины.

Уравнение (2) являющееся обобщением закона истечения через сопло на истечение через направляющие аппараты реактивных турбин (1), преобразуем так $\left(\text{в этом случае } k = \frac{1}{2}\right)$:

$$u \simeq \alpha (1 + kB), \tag{4}$$

полагая, что B мало по сравнению с 1. По данным Де-Спарре, впервые указавшего уравнение (4) (при $k = {}^1/_2$) оно дает вполне удовлетворительные результаты при $|B| < 0{,}5$. Для излагаемого ниже решения переход от уравнения (2) к уравнению (4), сводящий все уравнения задачи к линейным уравнениям, имеет принципиальное значение.

Подставляя в уравнение (1) величину u из уравнения (4) и α из уравнения (3) получим:

$$(c+\tau-1)\,B_{\tau-1} - (b+\tau)\,B_\tau = \frac{1}{k}\,, \tag{5}$$

где

$$c = \mp \frac{1 - k\rho\alpha_0}{k\sigma} \qquad b = \pm \frac{1 + k\rho\alpha_0}{k\sigma}\,.$$

В этих выражениях $\sigma = \frac{\rho}{\Theta}$ есть постоянная Мишо, не зависящая от скорости волн удара.

На основании уравнения (5) можно написать следующую систему уравнений:

$$-(b+1)B_1 = \frac{1}{k}$$

$$(c+1)\,B_1 - (b+2)\,B_2 = \frac{1}{k}$$

$$(c+2)\,B_2 - (b+3)\,B_3 = \frac{1}{k}$$

. . . .

$$(c+\tau-1)\,B_{\tau-1} - (b+\tau)B_\tau = \frac{1}{k}$$

из которой легко найти:

$$
B_{\tau} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix}
-(b+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\
c+1 & -(b+2) & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\
0 & c+2 & -(b+3) & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & c+\tau-2 & -(b+\tau-1) & \frac{1}{k} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c+\tau-1 & \frac{1}{k}
\end{vmatrix} \qquad (6)
$$

причем

$$
\Delta = (-1)^{\tau} (b+1)(b+2) \dots \dots (b+\tau).
$$

Раскрывая детерминант в выражении 6 и производя несложные преобразования, получим:

$$
B_{\tau} = -\frac{1}{k(b+\tau)} \left[\sum_{i=1}^{i=\tau-1} \frac{\prod\limits_{m=i}^{m=\tau-1} (c+m)}{\prod\limits_{m=i}^{m=\tau-1} (b+m)} + 1 \right] \qquad (7)
$$

Для преобразования выражения (7) воспользуемся известным свойством гамма-функции:

$$
\left.\begin{aligned}
(c+n)(c+n+1) \dots \dots (c+\tau-1) &= \frac{\Gamma(c+\tau)}{\Gamma(c+n)} \\
(b+n)(b+n+1) \dots \dots (b+\tau-1) &= \frac{\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b+n)}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)
$$

С помощью формул (8) выражение (7) приводится к виду:

$$
B_{\tau} = -\frac{1}{k(b+\tau)} \frac{\Gamma(c+\tau)}{\Gamma(b+\tau)} \sum_{i=1}^{i=\tau} \frac{\Gamma(b+i)}{\Gamma(c+i)} \qquad (9)
$$

Обратимся теперь к функции S, введенной И. М. Рыжик [2] и определяемой соотношением:

$$
S(z, y) = \frac{\Gamma(z+y-1)}{\Gamma(z)\,\Gamma(y)}, \qquad (10)
$$

где z и y — любые числа, кроме дробей, удовлетворяющие соотношению $z+y-1=0$ или -1 или -2 и т. д.

Положим:

$$
\frac{\Gamma(b+i)}{\Gamma(c+i)} = L \frac{S(z, i)}{S(y, i)}, \qquad (11)
$$

где L — некоторый множитель.

Для того, чтобы выражение (11) было тождеством, должно быть

$$z=b+1 \qquad y=c+1 \qquad L=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(c+1)},$$

в чем легко убедиться с помощью формулы (10), и таким образом:

$$\sum_{i=1}^{i=\tau-1}\frac{\Gamma(b+i)}{\Gamma(c+i)}=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(c+1)}\sum_{i=1}^{i=\tau-1}\frac{S(b+1,i)}{S(c+1,i)}. \tag{12}$$

Используя предложенную И. М. Рыжик формулу:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{S(z,k)}{S(y,k)}=\frac{y-1}{y-z-1}-\frac{z}{y-z-1}\,\frac{S(z+1,n)}{S(y,n)} \tag{13}$$

сумму ряда 12 можно выразить так:

$$\sum_{i=1}^{i=\tau-1}\frac{\Gamma(b+i)}{\Gamma(c+i)}=\frac{1}{c-b-1}\left[b\,\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)}-(b+\tau)\,\frac{\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(c+\tau)}\right] \tag{14}$$

после чего уравнение 9 приобретает вид:

$$B_\tau=-\frac{1}{k(c-b-1)}\left[b\,\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\cdot\frac{\Gamma(c+\tau)}{\Gamma(b+\tau+1)}-1\right] \tag{15}$$

Полученная нами формула (15) выражает гидравлический удар в функции времени для любых целых значений τ (что практически вполне достаточно) в процессе действия регулятора и справедлива как для открытия, так и для закрытия турбины.

Вопрос об определении наибольших и наименьших значений B из формулы (15) не может быть решен обычным способом отыскания экстремумов и сводится к исследованию знаков разностей $B_{\tau-1}-B$; $B_\tau-B_{\tau+1}$.

Намеченный нами путь решения задачи в принципе может быть применен также и к сложным системам, с тою лишь разницей, что математические преобразования в этом случае будут соответственно более сложными.

Гидроэлектрическая лаборатория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, сентябрь.

Ն. Ա. ՔԱՐԹՎԵԼԻՇՎԻԼԻ

Հիդրավլիկ հարվածի դեպքում ճնշման կախումը ժամանակից

Հոդվածում դուրս է բերված բանաձև 15, որն արտահայտում է հավասարաչափորեն բացված հաստատուններով խողովակաշարերում ճնշման գծային փոփոխությունները հիդրավլիկ հարվածի դեպքում, կախված ժամանակից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Мостков.* Гидравлический удар в гидроэлектрических станциях, 1938. 2. *И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1943.