ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

VIII 1948 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Импульсивные пакеты

(Представлено 25 XII 1947)

В предыдущих статьях мы ввели понятие о контурной производной и установили ряд операций над импульсивными функциями одной и двух переменных ([1,2,3]). Операции контурного дифференцирования можно упростить, если ввести понятие об импульсивном пакете.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x, y)$, определенную в области D. Тогда

$$\Pi\left[D; f(x, y)\right] = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{D}\sum f(x_i, y_k)\, \dot{\Gamma}(x_i, y_k)\, \Delta x \Delta y, \qquad (1)$$

назовем импульсивным пакетом от $f(x, y)$, определенным на D. Оператор этот является существенно разрывным и не поддается наглядному представлению. Если $f(x, y)$ изображает собою грузовую поверхность, то $\Pi[D; f(x, y)]$ соответственно можно представить как совокупность бесконечно большого числа сосредоточенных сил. Мы будем считать, что предел (1) существует, если существует

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy.$$

Из самого определения следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi[D; f(x, y)]\, dx dy = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{D}\sum f(x_i, y_k)\, \Delta x \Delta y = \iint_D f(x, y)\, dx dy.$$

Импульсивные пакеты в неявном виде применяются в математической физике, например, при решении краевой задачи с помощью функции Грина.

В дальнейшем остановимся подробнее на представлении посредством импульсивных пакетов линейно-распределенных импульсивных функций $\overset{|1|}{\Gamma}[C; f(s)]$, являющихся им эквивалентными в изложенном выше смысле.

Для простоты положим, что $f(s)$ непрерывная функция, допускающая производные вдоль C, причем C простая гладкая замкнутая дуга.

Все последующие выводы можно распространить с некоторыми несущественными усложнениями и для случаев, когда $f(s)$ претерпевает скачки, а C разомкнутая, или куоочно-гладкая дуга. Импульсивный пакет для $\overset{111}{\Gamma}(C)\, f(s)$ определится как

$$\Pi[C; f(s)] = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_C \dot{\Gamma}(s_i)\, f(s_i)\, \Delta s\,. \tag{2}$$

Имеют место следующие соотношения

$$\int\int_{C \subset T} \Pi[C; f(s)]\, dxdy = \int_C f(s)ds, \tag{3}$$

$$\psi(x, y)\, \Pi[C; f(s)] = \Pi[C; f(s)\psi(s)], \tag{4}$$

$$\Pi[C; f(s)] + \Pi[C; \varphi(s)] = \Pi[C; f(s) + \varphi(s)], \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Pi[C; f(s)]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \Pi[C; f(s)\cos\alpha] - \frac{\partial}{\partial n} \Pi[C; f(s)\sin\alpha], \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Pi[C; f(s)]}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \Pi[C; f(s)\sin\alpha] + \frac{\partial}{\partial n} \Pi[C; f(s)\cos\alpha]. \tag{7}$$

Аналогичным образом можно выразить и высшие контурные производные по x и y через естественные координаты кривой C. Это непосредственно вытекает из определения тех же операций над $\dot{\Gamma}(s_i)$ [3].

Таким образом, в конечном счете, в результате операций контурного дифференцирования и преобразований мы придем к выражениям типа

$$\frac{\partial^{k+t} \Pi[C; u(s)]}{\partial s^k \partial n^t}.$$

Теперь мы можем преобразовать производные от импульсивного пакета вдоль дуги S таким же точно образом, как это осуществил Кирхгофф при сведении крутящих моментов, распределенных вдоль свободного края изгибаемой плиты в силы перерезывающие. Рассмотрим простейший случай $\frac{\partial}{\partial s} \Pi[C; f(s)]$. В конечных контурных приращениях это выражение имеет вид:

$$\frac{\Delta \Sigma \dot{\Gamma}(s - s_i) f(s_i) \Delta s}{\Delta s} = \frac{1}{\Delta s} \Big[\Sigma \dot{\Gamma}[s - (s_i - \Delta s)]\, f(s_i) -$$

$$- \Sigma \dot{\Gamma}(s - s_i)\, f(s_i) \Big] = \frac{1}{\Delta s} \big[\Sigma \dot{\Gamma}(s - s_{i-1})\, f(s_i) -$$

$$- \Sigma \dot{\Gamma}(s - s_i)\, f(s_i) \big] = \Sigma \dot{\Gamma}(s - s_i) \frac{\Delta f(s_i)}{\Delta s}.$$

Итак, окончательно

$$\frac{\partial}{\partial s} \Pi[C; f(s)] = \Pi\left(C; \frac{\partial f(s)}{\partial s}\right).$$

В общем случае мы имеем, аналогично:

$$\frac{\partial^{k+l} \Pi[C; f(s)]}{\partial s^k \partial n^l} = \frac{\partial^l \Pi\left(C; \dfrac{\partial^k f(s)}{\partial s^k}\right)}{\partial n^l}. \tag{8}$$

Итак, в результате всех изложенных выше преобразований, после операций контурных дифференцирований мы приходим к выражениям типа

$$\frac{\partial^l \Pi[C; \varphi(s)]}{\partial n^l}.$$

Но последнее состоит из системы $\dfrac{\partial^l \dot{\Gamma}(s - s_i)}{\partial n^l} f(s_i)$, т. е. представляют из себя точечные моменты $l-1$-го порядка, плоскости действия которых совпадают с направлением нормали n к кривой C в точке s_i. Таким образом, приходим к заключению, что

$$\frac{\partial^l \Pi[C; \varphi(s)]}{\partial n^l} = \Gamma^{(l+1)}(C)\varphi(s). \tag{9}$$

Эти два выражения, строго говоря, не равны, а эквивалентны в изложенном выше смысле. Существо дела не изменится, если применим здесь знак равенства, т. к. по осуществлении операций интегрирования, к чему всегда и сводится задача, знак равенства приобретет свой обычный смысл.

Применим понятие об импульсивном пакете к контурному дифференцированию функций.

Согласно [3], если

$$u = \Gamma(C)\psi(x, y) = 0, \text{ вне } D,$$
$$= u(x, y) \text{ в } D,$$

то

$$\frac{\partial[u]}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \Gamma^{(1)}(C)\, u(s)\sin\alpha.$$

Этому выражению теперь можно придать вид:

$$\frac{\partial[u]}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \Pi[C; u(s)\sin\alpha].$$

Вторая контурная производная:

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Pi\left(C; \frac{\partial u(s)}{\partial x}\sin\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial x}\Pi[C; u(s)\sin\alpha]$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x}\Pi[C; u(s)\sin\alpha] = \Pi\left(C; \frac{\partial}{\partial s}\,\frac{1}{2}\,u(s)\sin 2\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial n}\Pi[C; u(s)\sin^2\alpha] =$$

$$= \overset{|1|}{\Gamma}(C)\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial u(s)}{\partial s}\sin 2\alpha + \frac{u(s)\cos 2\alpha}{\rho}\right) - \overset{|2|}{\Gamma}(C)\,u(s)\sin^2\alpha.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial u(s)}{\partial x} = \frac{\partial u(s)}{\partial s}\cos\alpha - \frac{\partial u(s)}{\partial n}\sin\alpha,$$

получим тот же результат, что и прежде [3]:

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \overset{|1|}{\Gamma}(C)\left[\frac{\partial u(s)}{\partial n}\sin^2\alpha - \frac{\partial u(s)}{\partial n}\sin 2\alpha - \frac{1}{\rho}\,u(s)\cos 2\alpha\right] +$$

$$+ \overset{|2|}{\Gamma}(C)\,u(s)\sin^2\alpha.$$

Отметим лишь, что в ряде задач необязательно преобразование контурных производных к естественным координатам кривой. Обстоятельство это упрощает выкладки. Отсюда также можно усмотреть, что представление об импульсивном пакете должно способствовать упрощению контурных операций в многомерном пространстве.

Импульсивные пакеты могут оказаться полезными при попытке построения операционного исчисления многих переменных. К последнему вопросу мы предполагаем впоследствии вернуться.

Институт Строительных
Материалов и Сооружений
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, декабрь.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Իմպուլսիվ փաթեթներ

Մենք դուրս բերեցինք $\Pi[D, f(x, y)]$ *իմպուլսիվ փաթեթի գաղափարը, որը հանդիսանում է չափազանց ընդհանուր առաջացում և կարող է փոխարինել* $f(x, y)$ *ֆունկցիային* D *տիրույթում, բացի այդ, նա համարժեք է վերջինիս ինտեգրման օպերացիայի ժամանակ։*

«Ակնառու» ներկայացման տեսակետից կարելի է ասել, որ եթե $f(x, y)$ *հանդիսանում է բեռան մակերևույթ, ապա* $\Pi[D, f(x, y)]$ *ներկայացնում է էլեմենտար կենտրոնացած ուժերի անվերջ բազմություն, որը համարժեք է բեռան մակերևույթին։*

Սահմանված են նաև մի շարք օպերացիաներ C *գծի երկայնքով բաշխված իմպուլսիվ փաթեթի համար. այդ օպերացիաները տրված են (2)—(9) բանաձևերով։*

Ցույց է տրված, որ օգտվելով իմպուլսիվ փաթեթներից, կարելի է նոր տեսանկյունով կառուցել կոնտուրային դիֆերենցման օպերացիան, որը հետազոտված է [2,3] *աշխատություններում։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Назаров.* Изв. АН Арм. ССР (естеств. науки), № 6 1946; 2. ДАН Арм. ССР, 7, № 1, 1947; 3. ДАН Арм ССР, 7, № 4, 1947.