

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

Н. Х. Арутюнян

Напряжения и деформации в бетонных массивах
с учетом ползучести бетона

(Представлено А. Г. Назаровым 8 XI 1947)

Для многих реальных тел закон однозначного соответствия между напряженным состоянием и деформацией не имеет места, так как такие тела обладают способностью при неизменном напряженном состоянии деформироваться во времени.

К числу таких материалов относятся бетон и железо-бетон.

Основной предпосылкой настоящей работы является допущение, принимающее, что между деформациями ползучести и соответствующими напряжениями имеется линейная зависимость.

1. *Продольная деформация.* Опыты по изучению бетона показали, что ползучесть в бетоне имеет место при любых напряжениях и даже таких, которые при кратковременном действии нагрузки могли вызвать лишь только упругие деформации.

Очевидно, что упруго-мгновенная деформация зависит от возраста бетона, т. е. от координаты времени, которой определяется момент приложения нагрузки. Деформация ползучести зависит как от возраста бетона, так и от продолжительности действия данной нагрузки.

Возраст бетона в дальнейшем будем определять координатой времени τ , а продолжительность действия нагрузки — координатой t . Начало отсчета времени можно принять произвольным, но не менее трехдневного возраста бетона.

Полная относительная деформация бетонного бруса к моменту времени t под действием единичного одноосного напряженного состояния, приложенного в некотором возрасте τ , будет определяться следующей зависимостью:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (1.1)$$

где $\frac{1}{E(\tau)}$ — упругая часть деформации от единичного напряжения, приложенного в возрасте τ , а $C(t, \tau)$ представляет деформацию ползу-

чести от единичного одноосного напряженного состояния, возникшего в момент возраста бетона τ .

Допустим, что к бетонному брусу в возрасте $\tau = \tau_1$ было приложено напряжение $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_1)$ и затем в последующее время $t \geq \tau_1$ это напряжение сохраняется постоянным.

Тогда согласно (1.1) будем иметь:

$$\varepsilon_x(t) = \delta(t, \tau_1) \sigma(\tau_1) = \frac{\sigma(\tau_1)}{E(\tau_1)} = \frac{\sigma(\tau_1)}{E^*(t, \tau_1)}, \quad (1.2)$$

где

$\varphi(t, \tau)$ — произведение $C(t, \tau)$ на модуль упругости $E(\tau)$;

$E^*(t, \tau)$ — приведенный модуль упругости полной деформации.

Рассмотрим случай, когда к бетонному брусу в возрасте $\tau = \tau_1$, приложено напряжение $\sigma_x(t)$, которое меняется с течением времени.

Тогда полная относительная деформация к моменту времени t на основании принципа наложения выразится следующей зависимостью:

$$\varepsilon_x(t) = \sigma_x(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma_x(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau; \quad (1.3)$$

или, интегрируя по частям, получим:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

2. Поперечные деформации. Пусть к бетонному брусу возраста $\tau = \tau_1$ в продольном направлении было приложено напряжение $\sigma_x(\tau) = \sigma_x(\tau_1)$, которое в последующее время $t \geq \tau_1$ остается постоянным. Тогда деформации в поперечном направлении могут быть разделены на две части: упруго-мгновенная, равная $\mu_1(\tau) \frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)}$ и ползучая, равная $\frac{\mu_2(t, \tau_1) \varphi(t, \tau_1)}{E(\tau_1)} \sigma_x(\tau_1)$, где $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(t, \tau)$ — коэффициенты Пуассона для соответствующих частей деформации.

Полная поперечная деформация будет

$$-\varepsilon_y(t) = -\varepsilon_z(t) = -\frac{\sigma_x(\tau_1)}{E(\tau_1)} \left[\mu_1(\tau_1) + \mu_2(t, \tau_1) \varphi(t, \tau_1) \right]. \quad (2.1)$$

При действии осевого напряжения $\sigma_x(t)$, приложенного в возрасте бетона $\tau = \tau_1$ и меняющегося с течением времени, для поперечных деформаций будем иметь следующие выражения:

$$\varepsilon_y(t) = \varepsilon_z(t) = -\frac{\sigma_x(t)}{E(t)} \mu_1(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\mu_1(\tau) + \mu_2(t, \tau) \varphi(t, \tau)}{E(\tau)} \right] d\tau \quad (2.2)$$

3. *Деформация сдвига.* Деформацию сдвига так же, как и осевую деформацию, можно разделить на две части: упруго-мгновенную и ползучую.

Пусть на бетонный образец в возрасте $\tau = \tau_1$ действует касательное напряжение $T_{xy} = T_{xy}(\tau_1)$, которое в последующее время $t \geq \tau_1$ остается постоянным. В этом случае полная относительная деформация сдвига будет

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{T_{xy}(\tau_1)}{G(\tau_1)} [1 + \omega(t, \tau_1)], \quad (3.1)$$

где

$G(\tau)$ —мгновенный модуль сдвига, равный $\frac{E(\tau)}{2[1 + \mu_1(\tau)]}$;

$\omega(t, \tau)$ —функция, характеризующая ползучесть сдвига данного бетона.

При действии напряжения $T_{xy}(t)$ в момент возраста $\tau = \tau_1$ и меняющегося с течением времени, для полной деформации сдвига будем иметь следующее выражение:

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{T_{xy}(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t T_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1 + \omega(t, \tau)}{G(\tau)} \right] d\tau. \quad (3.2)$$

Однако, в силу известной геометрической зависимости

$$\epsilon_x(t) = \frac{\gamma_{xy}(t)}{2}, \quad (3.3)$$

которая должна выполняться при чистом сдвиге для любых значений t , функции ползучести $\varphi(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ должны быть связаны зависимостью

$$\omega(t, \tau) = \frac{1 + \mu_2(t, \tau)}{1 + \mu_1(t, \tau)} \varphi(t, \tau). \quad (3.4)$$

4. *Объемное напряженное состояние.* Пользуясь соотношениями (1.4), (2.2), (3.2) и (3.4), можно написать выражения, связывающие компоненты тензора деформации с компонентами тензора напряжения в общем случае объемного напряженного состояния. Если предполагать, что все напряжения вступают в действие одновременно, эти соотношения будут иметь следующий вид:

$$\epsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)[1 + \mu_1(t)] - \mu_1(t)S(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_x(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] - S(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau;$$

$$s_y(t) = \frac{\sigma_y(t)[1 + \mu_1(t)] - \mu_1(t)S(t)}{E(t)} - \int_{-1}^1 \left\{ \sigma_y(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] - \right. \\ \left. - S(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} \right\} d\tau; \quad (4.1)$$

$$\delta(t, \tau) = \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E(\tau)} ; \delta_1(t, \tau) = \frac{\mu_1(\tau) + \mu_2(t, \tau)\varphi(t, \tau)}{E(\tau)} ; S(t) = \sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t).$$

Обозначим компоненты напряжения в „упруго-ползучем“ теле соответственно через σ_x^* , σ_y^* , T_{xy}^* , ϵ_x^* , ϵ_y^* , γ_{xy}^* , γ_{yx}^* , γ_{zy}^* , а напряжения и деформации соответствующей упруго-мгновенной задачи через σ_x , σ_y , σ_z , ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^*}{\partial z} + K_x &= 0 \\ \frac{\partial T_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^*}{\partial z} + K_y &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} F_{nx}(l) &= \sigma_x^* \cos(nx) + T_{xy}^* \cos(ny) + T_{zx}^* \cos(nz) \\ F_{ny}(l) &= T_{xy}^* \cos(nx) + \sigma_y^* \cos(ny) + T_{zy}^* \cos(nz). \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^*}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z^*}{\partial y^2} &+ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}^*}{\partial y \partial z} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тогда уравнения Бельтрами-Митчелля для „упруго-ползучего“ тела примут следующий вид:

$$\frac{[1+\mu_1(t)]\Delta^2\sigma_x^*(t)+\frac{\partial^2S^*(t)}{\partial x^2}}{E(t)}-\int\limits_{\tau_1}^t\left\{\Delta^2\sigma_x^*(t)\left[\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}\right]-\right.\\ \left.-\frac{\partial^2S^*(\tau)}{\partial x^2}-\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau=0\tag{5.4}$$

.....

Остальные зависимости получаются путем круговой перестановки координат x, y, z .

Пусть функции, характеризующие изменения коэффициентов Пуассона для упругой и ползучей части деформации $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(t,\tau)$, зависят только от возраста бетона и имеют одинаковое значение, т. е. $\mu_1(\tau)=\mu_2(\tau)=\mu(\tau)$, тогда уравнения Бельтрами-Митчелля (5.4) вырождаются в интегральные уравнения следующего вида:

$$\frac{[1+\mu(t)]\Delta^2\sigma_x^*(t)+\frac{\partial^2S^*(t)}{\partial x^2}}{E(t)}-\int\limits_{\tau_1}^t\left\{[1+\mu(\tau)]\Delta^2\sigma_x^*(\tau)+\frac{\partial^2S^*(\tau)}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial\delta}{\partial\tau}d\tau=0\tag{5.5}$$

Остальные зависимости получаются из (5.5) путем циклической перестановки координат x, y, z .

Соотношение (5.5) представляет однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром

$$K(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{E(t)}{E(\tau)}[1+\varphi(t,\tau)]$$

и, как известно, не имеет других решений, кроме тождественного нуля. Единственное решение этого уравнения есть:

$$[1+\mu(t)]\Delta^2\sigma_x^*(t)+\frac{\partial^2S^*(t)}{\partial x^2}=0\tag{5.6}$$

которое полностью совпадает с известными уравнениями Бельтрами-Митчелля для чисто упруго мгновенной задачи.

Таким образом имеем:
Если напряженное состояние в „упруго-ползучем“ теле выз-

вано только силовыми факторами и функции, характеризующие изменения коэффициента Пуассона для упругой и ползучей части деформации, одинаковы, то система напряжений в „упруго-ползучем“ теле тождественно совпадает с соответствующими напряжениями упруго-мгновенной задачи для этого же тела:

$$\sigma_x(t) = \sigma_x^*(t), \quad \sigma_y(t) = \sigma_y^*(t), \quad \sigma_z(t) = \sigma_z^*(t) \quad (5.7)$$

$$T_{xy}(t) = T_{xy}^*(t) \quad T_{yz}(t) = T_{yz}^*(t) \quad T_{xz}(t) = T_{xz}^*(t)$$

Влияние фактора ползучести сказывается в этих случаях только на величины деформаций.

Если напряженное состояние в „упруго-ползучей“ среде постоянно или изменяется по линейному закону, то равенства напряжений:

$$\sigma_x(t) = \sigma_x^*(t) \quad \sigma_y^*(t) = \sigma_y(t), \quad . \quad . \quad . \quad T_{xy}(t) = T_{xy}^*(t)$$

имеют место всегда, даже при условии $\mu_1(\tau) \neq \mu_2(\tau)$.

Полученные выше результаты полностью подтверждаются экспериментальными исследованиями ряда авторов (3) (Саталкин, Столяров и т. д.) и последними опытами Росса (4) с бетонными арками.

Рассмотрим случай, когда напряженное состояние в „упруго-ползучем“ теле вызвано факторами, связанными с изменением деформации, например, осадка опор сооружений или раздвижка опор, температурное воздействие, начальные напряжения и т. д.

В этом случае уравнения Бельтрами-Митчелля (5.5) для „упруго-ползучего“ тела будут представлять уже неоднородные интегральные уравнения Вольтерра второго рода и имеют решения, как известно, отличные от нуля. Исследование этих уравнений показывает, что напряжения в „упруго-ползучем“ теле $\sigma_x^*(t)$, $\sigma_y^*(t)$, $T_{xy}^*(t)$ будут определяться порознь, т. е. каждое в отдельности из самостоятельного интегрального уравнения только тогда, когда $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau) = \mu$.

Пользуясь соотношениями (4.1), (5.2) и (5.4), можно установить связь между отдельными напряжениями σ_x^* , σ_y^* , T_{xy}^* , T_{xz}^* σ_z^* и соответствующими напряжениями σ_x , σ_y , T_{xy} , T_{xz} σ_z упруго-мгновенной задачи, если только напряженное состояние в „упруго-ползучем“ теле вызвано факторами, связанными с изменением деформации. Эти зависимости будут иметь следующий вид:

$$\sigma_x(t) = \frac{\sigma_x^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_x^*(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (5.8)$$

$$\sigma_y(t) = \frac{\sigma_y^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_y^*(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

$$\dots \dots \dots$$

Ползучесть будет сказываться в этом случае не только на значении деформации, но и на величине напряжений σ_x^* , σ_y^* , σ_z^* , T_{xy}^* , T_{xz}^* , T_{yz}^* , заставляя их убывать со временем.

Полученное соотношение (5.8) представляет интегральное уравнение Вольтерра второго рода с регулярным ядром

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E(\tau)} \quad (5.9)$$

и с известной правой частью $\sigma_x(1)$, которая представляет решение соответствующей упруго мгновенной задачи для данного тела [при $\varphi(1, \tau) = 0$] и находится обычными методами теории упругости или строительной механики.

Таким образом, решением уравнения типа (5.8) полностью определяются значения напряжений σ_x^* , σ_y^* , σ_z^* , T_{xy}^* , T_{xz}^* , T_{yz}^* как функции времени t , и тем самым разрешается поставленная задача о равновесии упруго-ползучего тела.

Представляет интерес приложение полученных результатов к исследованию напряжений и деформаций в железо-бетонных сооружениях, а также к некоторым конкретным задачам по расчету массивных бетонных сооружений (арки, балки и т. д.), что составляет содержание следующего сообщения.

Сектор Математики и Механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, октябрь.

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Լարվածությունը և դեֆորմացիաները բետոնյա զանգվածներում բետոնի հոսունությամբ ակնառու մով

Տվյալ աշխատանքի մեջ տրվում է բետոնի զանգվածներում առաջ եկած լարումների և դեֆորմացիաների ուսումնասիրումը, հաշվի առնելով բետոնի հոսունության համակարգությունը: Ամենուրեք համար լարված վիճակի համար սահմանված են այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց դեպքում հոսունությունը չի ազդում լարվածության մեծության վրա: Նշված են այն դեպքերը, երբ հոսունությունն ազդում է բետոնի զանգվածի լարված վիճակի վրա և տրված են հիմնական հավասարումները՝ այդ լարվածության արժեքները որոշելու համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Беляев, И. П. Александрин, Н. Г. Корсик и А. В. Сатаджик. Прочность, упругость и ползучесть бетона. 1941.
2. Я. Столяров. Введение в теорию железобетона. 1941.
3. С. П. Тимошенко. Теория упругости. 1938.
4. A. D. Ross. The effects of creep on instability and indeterminacy investigated by plastic models, 1946.