ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
VII 1947 5

ФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, действ. чл. АН Арм. ССР

О диффузном отражении и пропускании света анизотропной одномерной рассеивающей средой конечной оптической толщины

(Представлено 10 XII 1947)

В одной из наших работ ([1]) было показано, как задача о диффузном отражении и пропускании света одномерной, изотропной рассеивающей и поглощающей средой конечной оптической толщины может быть разрешена с помощью некоторых функциональных уравнений.

Мы считали среду изотропной, хотя само рассеяние в ней могло быть анизотропным в том смысле, что при элементарном акте рассеяния энергия могла направляться не поровну в обе стороны, а определенная доля x в направлении падающего луча, а доля $1-x$ в противоположном направлении.

Здесь же мы возьмем анизотропную среду такую, что доля энергии рассеиваемой в направлении падающего луча и в противоположном направлении будет соответственно x и $1-x$, когда луч падает слева и y и $1-y$, когда луч падает справа. В частном случае, когда $x=y$, имеем изотропную среду с анизотропным рассеянием.

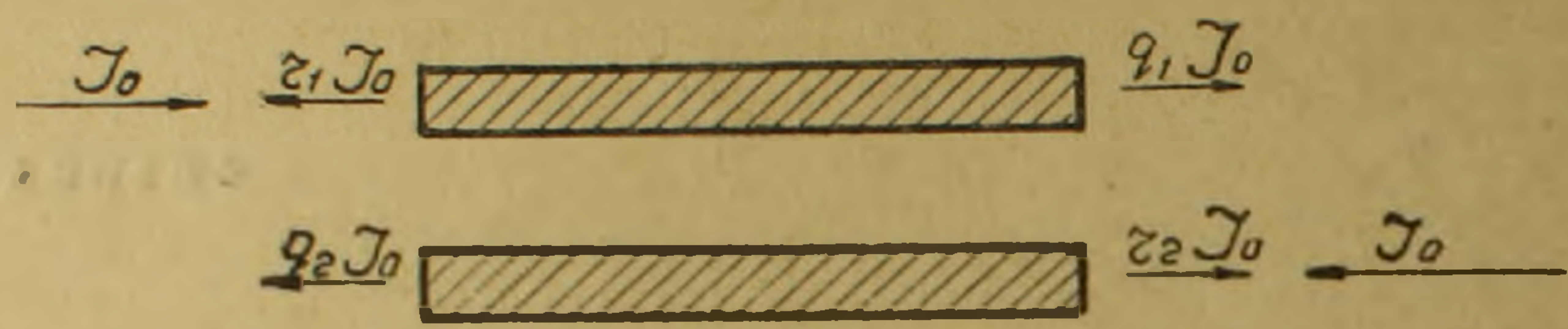
В результате мы будем иметь следующий макроскопический эффект при диффузном пропускании и отражении. Пусть имеем одномерную среду конечной оптической толщины. Когда излучение падает на нее слева (см. чертеж 1), мы будем иметь один коэфициент пропускания q_1 и коэфициент диффузного отражения r_1.

Когда же на тот же слой излучение падает справа, мы будем иметь другие коэфициенты диффузного пропускания q_2 и диффузного отражения r_2.

Задачей является установление зависимости этих четырех коэфициентов от оптической толщины. В настоящей заметке мы разберем только случай чистого анизотропного рассеяния. При чистом рассеянии

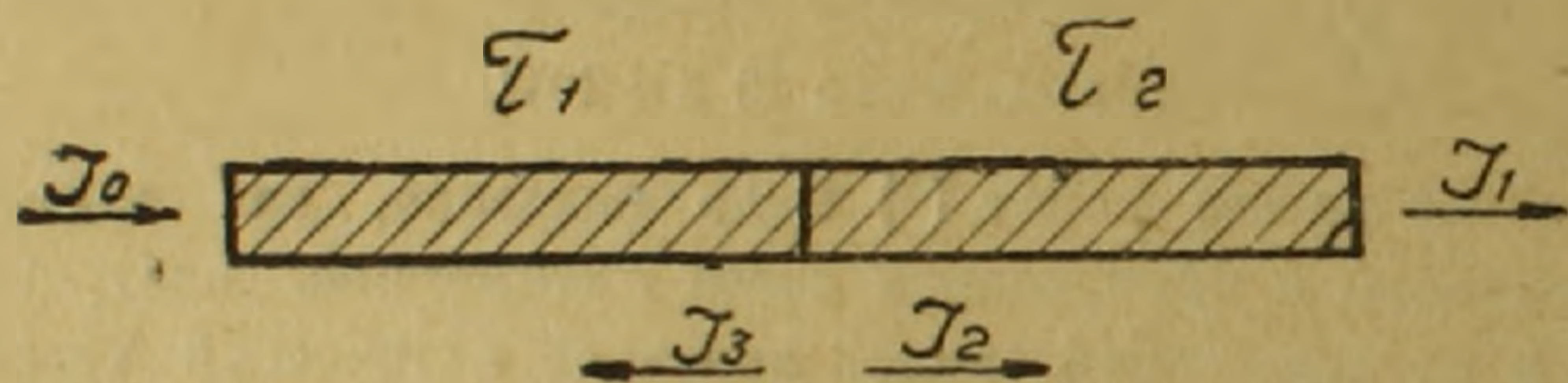
$$r_1 = 1 - q_1$$
$$r_2 = 1 - q_2 \qquad (1)$$

и остается определить только q_1 и q_2. Эти величины могут быть найдены путем решения соответствующих уравнений переноса. Однако, здесь мы используем элегантный метод функциональных уравнений, который был уже нами развит для частного случая изотропной среды.



Черт. 1

Для вывода приложим друг к другу две среды с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 таким образом, чтобы у них была одинаковая ориентация.



Черт. 2.

Пусть на границе между средами τ_1 и τ_2 интенсивность излучения идущего направо будет I_2, а излучения идущего налево I_3. Если I_0 и I_1 суть интенсивности падающего слева и выходящего справа излучений соответственно, а интенсивность излучения входящего в среду справа равна нулю, то очевидно должны иметь место соотношения

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= q_1(\tau_1+\tau_2)I_0 \\ I_1 &= q_1(\tau_2)I_2 \\ I_3 &= r_1(\tau_2)I_2 \\ I_2 &= q_1(\tau_1)I_0+r_2(\tau_1)I_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Условием совместности этих четырех однородных уравнений является

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q_1(\tau_1)q_1(\tau_2)}{1-r_2(\tau_1)r_1(\tau_2)}. \qquad (3)$$

Внося (1) в (3), получаем:

$$q_1(\tau_1+\tau_2)=\frac{q_1(\tau_1)q_1(\tau_2)}{q_1(\tau_1)+q_1(\tau_2)-q_1(\tau_1)q_1(\tau_2)}. \qquad (4)$$

Аналогичное уравнение получим рассматривая случай излучения падающего справа

$$q_2(\tau_1+\tau_2)=\frac{q_2(\tau_1)q_2'(\tau_2)}{q_2(\tau_1)+q_2(\tau_2)-q_2(\tau_1)q_2(\tau_2)}. \qquad (5)$$

Разделив (5) на (4), получаем:

$$\frac{q_2(\tau_1+\tau_2)}{q_1(\tau_1+\tau_2)} = \frac{q_2(\tau_1)}{q_1(\tau_1)} \frac{q_2(\tau_2)}{q_1(\tau_2)}, \tag{6}$$

откуда очевидно, что

$$\frac{q_2(\tau)}{q_1(\tau)} = e^{k\tau}. \tag{7}$$

Теперь возьмем обратные величины от обеих частей уравнения (4).

$$\frac{1}{q_1(\tau_1+\tau_2)} = \frac{1}{q_1(\tau_1)} + \frac{q_2(\tau_1)}{q_1(\tau_1)} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \tag{8}$$

Вычитая из обеих частей единицу и учитывая (7), находим:

$$\frac{1}{q_1(\tau_1+\tau_2)} - 1 = \frac{1}{q_1(\tau_1)} - 1 + e^{k\tau_1} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \tag{9}$$

Обозначая

$$\frac{1}{q_1(\tau)} - 1 = f(\tau), \tag{10}$$

переписываем (9) в виде:

$$f(\tau_1+\tau_2) = f(\tau_1) + e^{k\tau_1} f(\tau_2). \tag{11}$$

Дифференцируя по τ_2 находим:

$$f'(\tau_1+\tau_2) = e^{k\tau_1} f'(\tau_2)$$

или полагая $\tau_2 = 0$

$$f'(\tau) = f'(0) e^{k\tau} = kAe^{k\tau},$$

где A—постоянная.

Отсюда

$$f(\tau) = A\left(e^{k\tau} - 1 \right),$$

так как из (11) очевидно, что $f(0)=0$. Следовательно

$$q_1(\tau) = \frac{1}{1 + A\left(e^{k\tau} - 1\right)}. \tag{12}$$

Кроме того, на основании (7)

$$q_2(\tau) = \frac{1}{e^{-k\tau} + A\left(1 - e^{-k\tau}\right)}. \tag{13}$$

Выражения (12) и (13) представляют собой решение системы (4) и (5) в конечном виде. Во всех решениях, имеющих физический смысл, $A > 1$.

Самым интересным является то, что при $k \neq 0$ одно из выражений (12) и (13) (в зависимости от знака k) стремится при $\tau \to \infty$ к постоянной величине. Иными словами, несмотря на беспредельное возрастание оптической толщины, прозрачность в одном направлении стремится к отличной от нуля постоянной (в другом направлении она стремится к нулю).

Ясно также, что в случае изотропии среды $k=0$ и из (11) получаем функциональное уравнение, уже рассмотренное в предыдущей работе.

Бюраканская
Астрономическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, ноябрь.

Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Վերջավոր օպտիկական հաստության անիզոտրոպ միաչափ միջավայրի կողմից լույսի գիծով անդրադարձման և թափանցման մասին

Վերջավոր օպտիկական հաստություն ունեցող անիզոտրոպ միջավայրի դիֆուզ թափանցման գործակիցների $q_1(\tau)$ *և* $q_2(\tau)$ *համար մաքուր ցրման դեպքում ստացվել են (4) և (5) ֆունկցիոնալ հավասարումները, որոնց լուծումը արտահայտվում է (12) և (13) միջոցով։ Այստեղ* $q_1(\tau)$ *և* $q_2(\tau)$ *վերաբերում են այն դեպքերին, երբ արտաքին ճառագայթները գալիս են ձախից և աջից համապատասխանաբար։ Անդրադարձման գործակիցները, համաձայն (1)-ի, արտահայտվում են թափանցման գործակիցների միջոցով։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Амбарцумян*. Изв. АН Армянской ССР, Серия естеств. наук, стр. 31, 1944.