ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
VII 1947 5

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О представимости некоторых классов целых функций

(Представлено А. Л. Шагиняном 7 X 1947)

Существует обширная литература, посвященная вопросам представимости и полноты различных систем аналитических функций [см. напр., (1), (2)]. В настоящей заметке мы приводим некоторые результаты о представимости и полноте определенных классов целых функций.

1. Отнесем к классу $M_2(\sigma, \alpha)$ $(\sigma > 0, \alpha > 0)$ все целые функции $f(z)$, для которых интеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} \, | f(\rho e^{i\vartheta}) |^2 d\vartheta d\rho \tag{1}$$

существует.

Можно установить следующие предложения.

Теорема I. Функции класса $M_2(\sigma, \alpha)$ *представляются в следующем параметрическом виде:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} F(\rho,\vartheta)\, E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta}) d\vartheta d\rho, \tag{2}$$

где $F(\rho,\vartheta)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} \, | F(\rho,\vartheta) |^2 d\vartheta d\rho < +\infty \tag{3}$$

и

$$E_{\sigma,\alpha}(z)=\sigma\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{\frac{2n}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2n}{\alpha}\right)} z^n \tag{4}$$

целая функция Миттаг-Лефлера порядка $\frac{\alpha}{2}$ *и типа* σ.

Теорема II. Если $f(z) \subset M_2(\sigma,\alpha)$, *то при* $|z| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} f(\rho e^{i\vartheta})\, E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta})\, d\vartheta d\rho, \tag{5}$$

при этом $f(\rho e^{i\vartheta})$ *минимизирует интеграл (3) в классе функций* $F(\rho,\vartheta)$, *представляющих функцию* $f(z)$ *в виде (2).*

Замечание. Если $\alpha = \frac{2}{q}$ $(q = 1, 2, 3 \ldots)$, то

$$E_{\sigma,\frac{2}{q}}(z) = \frac{2\sigma}{q^2} \sum_{k=0}^{q-1} e^{\sigma\omega^k \sqrt[q]{z}} \quad \left(\omega = e^{\frac{2\pi}{q} i}\right). \tag{6}$$

В частности

$$E_{\sigma,2}(z) = 2\sigma e^{\sigma z} \quad \text{и} \quad E_{\sigma,1}(z) = \sigma \operatorname{Ch} \sigma \sqrt{z}. \tag{7}$$

2. Пользуясь предыдущим, установим полноту некоторых систем целых функций на всей плоскости комплексного переменного.

Рассмотрим систему целых функций

$$\varphi_n(z) = E_{\sigma,2}(\bar{a}_n z) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где a_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ — произвольная последовательность неравных комплексных чисел.

Очевидно, что $\varphi_n(z) \subset M_2(\sigma,\alpha)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, и по теореме II

$$\varphi_n(a_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} \varphi_n(\rho e^{i\vartheta}) \overline{\varphi_m(\rho e^{i\vartheta})}\, d\vartheta d\rho \quad (n;\ m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Ортогонаризуем систему функций (8) по площади на всей плоскости при наличии веса $\frac{1}{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1}$.

Для этого обозначим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \varphi_0(a_0), & \varphi_1(a_0), \ldots, & \varphi_n(a_0) \\ \varphi_0(a_1), & \varphi_1(a_1), \ldots, & \varphi_n(a_1) \\ \varphi_0(a_n), & \varphi_1(a_n), \ldots, & \varphi_n(a_n) \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \left| \begin{array}{c|c} \Delta_{n-1} & \begin{matrix} \varphi_n(a_0) \\ \varphi_n(a_1) \\ \varphi_n(a_{n-1}) \end{matrix} \\ \hline \varphi_0(z),\ \varphi_1(z), \ldots, & \varphi_n(z) \end{array} \right|, \quad \Delta_{-1} = 1. \tag{11}$$

Тогда из (9) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^{\alpha}} \rho^{\alpha-1} \Psi_n(\rho e^{i\vartheta}) \overline{\Psi_m(\rho e^{i\vartheta})}\, d\vartheta d\rho = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}. \tag{12}$$

Кроме того, из (11) имеем при $n=0, 1, 2\ldots$

$$\Psi_n(a_0)=\Psi_n(a_1)=\cdots=\Psi_n(a_{n-1})=0,\ \Psi_n(a_n)=\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \qquad (13)$$

Имеет место

Теорема III. Если последовательность $\{a_n\}$ *имеет хотя бы одну предельную точку в конечной части плоскости, то для всякой целой функции* $f(z)$ *класса* $M_2(\sigma, \alpha)$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}\,\Big|\,f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}A_k\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})\,\Big|^2 d\vartheta d\rho=0, \qquad (14)$$

где

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha}\rho^{\alpha-1}f(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{\Psi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,d\vartheta d\rho. \qquad (15)$$

Из (14) следует также, что для всякого $\rho>\frac{\sigma}{2}$ *и* $\varepsilon>0$ *число* N *можно выбрать таким образом, чтобы неравенство*

$$e^{-\rho|z|^\alpha}\,\Big|\,f(z)-\sum_{k=0}^{N}A_k\Psi_k(z)\,\Big|<\varepsilon \qquad (16)$$

удовлетворялось во всей плоскости z *при* $n>N$.

Отметим, что в силу (13) и (15) коэфициенты $\{A_k\}$ можно определить из следующих рекурентных формул:

$$f(a_n)=A_0\Psi_0(a_n)+A_1\Psi_1(a_n)+\cdots+A_n\Psi_n(a_n)\ (n=0, 1, 2,\ldots). \qquad (17)$$

3. Результат теоремы II остается в силе и при более общих предположениях о последовательности точек $\{a_n\}$.

Скажем, что класс целой функции $f(z)$ не выше (соответственно—ниже) $[\alpha, \sigma]$, если либо порядок $f(z)$ меньше α, либо равен α, но тогда тип не больше (соответственно—меньше) σ.

Можно показать, что всякая функция $f(z)$ класса $M_2(\sigma, \alpha)$ является функцией класса не выше $\left[\alpha, \frac{\sigma}{2}\right]$, и всякая функция $f(z)$ класса ниже $[\alpha, \sigma]$ будет класса $M_2(2\sigma, \alpha)$.

Для краткости последовательность точек $\{a_n\}$ будем называть „единственной“ для функций данного класса, если для каждой функции $f(z)$ этого класса из $f(a_n)=0$ $(n=0, 1, 2\ldots)$ следует, что $f(z)\equiv 0$.

Существуют довольно сильные критерии для единственности последовательностей, связывающие порядок роста целой функции с плотностью ее нулей. Например, известен следующий результат, принадлежащий Боасу [3].

Последовательность $\{a_n\}$ *будет единственной для функций класса не выше* $[\alpha, \sigma]$, *если*

$$\text{a)} \quad \liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \sigma\alpha \tag{18}$$

или

$$\text{b)} \quad \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > e\sigma\alpha \tag{19}$$

c) *Точки* a_n *лежат в некотором угле с раствором* 2ω *и*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \frac{\sigma\alpha\omega}{\pi B} \left(\omega > \frac{b}{\alpha}\right) \tag{20}$$

или

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \frac{\sigma}{\pi \cos \omega\alpha} \left(\omega \leqslant \frac{b}{\alpha}\right), \tag{21}$$

где $B = b \cos b$ *есть максимум функции* $x \cos x$ *в* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

При помощи этого критерия устанавливается

Теорема IV_1. *Результаты (14) и (16) теоремы III остаются в силе, если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет одному из следующих условий*

$$\text{a)} \quad \liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \frac{\sigma\alpha}{2} \tag{18'}$$

$$\text{b)} \quad \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > e\,\frac{\sigma\alpha}{2} \tag{19'}$$

c) *Точки* $\{a_n\}$ *лежат в угле с раствором* 2ω *и*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \frac{\sigma\alpha\omega}{2\pi B} \left(\omega > \frac{b}{\alpha}\right) \tag{20'}$$

или

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{n}{|a_n|^{\alpha}} > \frac{\sigma}{2\pi \cos \omega\alpha} \left(\omega < \frac{b}{\alpha}\right), \tag{21'}$$

где $B = b \cos b$, *есть максимум* $x \cos x$ в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Так как всякая функция $f(z)$ класса ниже $[\alpha, \sigma]$ принадлежит к классу $M_2(2\sigma, \alpha)$, то имеем:

Теорема IV_2. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет одному из условий (18)—(21), то для всякой функции* $f(z)$ *класса ниже* $[\alpha, \sigma]$ *результаты (14) и (16) теоремы III остаются в силе.*

4. Наконец, приведем пример ортонормальной системы целых функций.

При $\alpha = 2$ из (7) и (11) получим

$$\Psi_0(z) = \sqrt{2\sigma}, \quad \Psi_n(z) = \sqrt{2\sigma} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(e^{\sigma z} - e^{\sigma k} \right)}{\sqrt{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(e^{\sigma n} - e^{\sigma k} \right)}}, \tag{22}$$

при этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^2} \Psi_n(\rho e^{i\vartheta}) \overline{\Psi_m(\rho e^{i\vartheta})} \rho d\rho d\vartheta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}. \tag{23}$$

Сектор Математики и Механики
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1947, февраль.

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացնելիության մասին

Այս հոդվածում սահմանված է ամբողջ ֆունկցիաների $M_\sigma(z, \alpha)$ դասը տեսքի (1) ինտեգրալի միջոցով։ Բերված է ինտեգրալ պատկերում՝ $M_\sigma(z, \alpha)$ դասի ֆունկցիաները ներկայացնելու համար։ Ստացված են ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերում Միտտագ-Լեֆլերի ֆունկցիաների (8) սիստեմի լրիվության համար բավարար պայմաններ։

Վերջում բերված է ամբողջ ֆունկցիաների օրթոնորմալ սիստեմի մի օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Маркушевич*. О базисе в пространстве аналитических функций. Матем. сборн., 17, 211—25, 1945. 2. *R. P. Boas*. Fundamental sets of entire Functions, Annal of Mathematics, 47, № 1, 21—32, 1946.