ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

VII 1947 4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Арм. ССР

Определение импульсивных функций двух переменных

(Представлено 16 X 1947)

В предыдущих работах мы рассмотрели импульсивные функции одной переменной ([1,2]).

Здесь мы рассматриваем импульсивные функции двух переменных, интерпретирующие такого рода понятия, как массы, силы, моменты и т. д., сосредоточенные в отдельных точках или распределенные по некоторым линиям (например, простой и двойной слои). Понятия эти полезны, но для них до сих пор не установлены ни символика, ни четко определенные операции. Мы приводим здесь краткое изложение результатов разработанной нами теории, которая, полагаем, может оказаться полезной при рассмотрении некоторых вопросов математической физики. Оператор $\dot{\Gamma}(x,y)$, повсюду тождественно равный нулю и обладающий в начале координат такой особенностью, что

$$\iint\limits_{(0,0)\subset T} \dot{\Gamma}(x, y)\, dxdy = 1,$$

назовем единичной точечной импульсивной функцией с точкой особенности (0,0). Тогда $\dot{\Gamma}(x-x_0, \; y-y_0) \equiv \dot{\Gamma}(x_0, y_0)$ будет иметь точку особенности (x_0, y_0). Если точка особенности импульсивной функции расположена на дуге C в точке $s=s_0$, то примем обозначение $\dot{\Gamma}(s_0)$. Если положение точки особенности не имеет значения, просто будем писать $\dot{\Gamma}$. $\dot{\Gamma}$ изображает некоторый сосредоточенный физический фактор (напр., силу) величиной 1. Первые контурные производные по x и y от $\dot{\Gamma}$ соответственно изображают сосредоточенные единичные „моменты" в направлениях $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ [1], ([2])*:

---

* Здесь символ [ ] контурной производной опущен, т. к. благодаря наличию оператора $\dot{\Gamma}$ производная м. б. понята только в контурном смысле. С точки зрения чистой математики переход к пределу здесь осуществлен не строго. При желании, импульсивные функции можно интерпретировать как неравномерно-сходящиеся функциональные ряды ([2]).

$$\frac{\partial\dot{\Gamma}}{\partial x} = \dot{\Gamma}'_x = \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\dot{\Gamma}(x+\Delta\xi, y) - \dot{\Gamma}(x, y)}{\Delta\xi}$$

$$\frac{\partial\dot{\Gamma}}{\partial y} = \dot{\Gamma}'_y = \lim_{\Delta\eta\to 0} \frac{\dot{\Gamma}(x, y+\Delta\eta) - \dot{\Gamma}(x, y)}{\Delta\eta},$$

где ξ и η — параметры.

Высшие производные представляют собой операторы, изображающие некоторые обобщенные силы. Нетрудно определить, пользуясь векториальными свойствами малых перемещений, что

$$\dot{\Gamma}'_s = \dot{\Gamma}'_x \cos\alpha + \dot{\Gamma}'_y \sin\alpha,$$

где $\alpha = \angle(x, s)$.

Установлены следующие главные свойства этих операторов*:

$$\dot{\Gamma}''_{xy} = \dot{\Gamma}''_{yx},$$

$$\dot{\Gamma}^{|k+t|}_{x^k y^t} = \left(\frac{\partial}{\partial s}\cos\alpha - \frac{\partial}{\partial n}\sin\alpha\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha + \frac{\partial}{\partial n}\cos\alpha\right)^t \cdot \dot{\Gamma},$$

где $\angle(x, n) = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

$$\dot{\Gamma}^{|m+n|}_{x^m y^n}\, x^k y^p = 0, \text{ при } m < k \text{ или } n < p$$

$$= (-1)^{k+p} \frac{m!\, n!}{(m-k)!\,(n-p)!}\, \dot{\Gamma}^{|m-k+n-p|}_{x^{m-k} y^{n-p}} \cdot x^{k-m} y^{p-n}.$$

Легко вычислить $\dot{\Gamma}^{|m+n|}_{x^m y^n} \cdot f(x,y)$, если $f(x,y)$ разлагается в ряд Тэйлора в окрестности точки особенности оператора.

Наконец,

$$\iint\limits_{(a,b)\subset T} \dot{\Gamma}^{|m+n|}_{x^m y^n}\, dxdy = 0.$$

Пусть C—гладкая простая замкнутая линия, ограничивающая область D в плоскости xoy, с положительным направлением обхода, оставляющим область D слева. Внутреннюю нормаль считаем положительной.

Функцию

$$\Gamma(C; x, y) = \Gamma(C) = 1 \text{ в } D$$
$$= 0 \text{ вне } D,$$

назовем двумерным разрывным множителем, определенным на C. В дальнейшем условимся функцию $u(x, y)$, претерпевающую разрывы первого рода вдоль некоторых линий C_i, представлять следующим образом:

$$u(x, y) = \psi(x, y) + \Sigma\Gamma(C_i)\,\psi_i(x, y),$$

* В этой статье, также как и в нашей статье ДАН Арм. ССР, VII, № 1, 1947, $\Gamma^{|n|}$ следует читать как $\Gamma^{(n)}$.

где $\psi(x, y)$ не имеет разрыва первого рода во всей области. В дальнейшем, для выяснения существа вопроса, без ущерба для общности, будем рассматривать

$$u(x, y) = \Gamma(C)\psi(x, y) = 0 \text{ вне } D, \quad = u(x, y) \text{ в } D \tag{1}$$

Пусть дана вспомогательная линия C', отложенная от C на расстоянии Δn в сторону отрицательных n. Тогда

$$\frac{\partial\Gamma(C)}{\partial n} = \overset{|1|}{\Gamma}(C; x, y) = \overset{|1|}{\Gamma}(C) = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Gamma(C') - \Gamma(C)}{\Delta n}$$

является единичной импульсивной функцией, распределенной вдоль C. Если участок дуги (s_1, s_2), $s_2 > s_1$ попадает в область интегрирования, то

$$\iint\limits_{(s_1, s_2) \subset T} \overset{|1|}{\Gamma}(C)dxdy = \int\limits_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1.$$

Оператор $\overset{|1|}{\Gamma}(C) f(s)$ есть импульсивная функция первого порядка, интенсивность распределения импульса которого равна $f(s)$. Ясно, что это есть символическое представление простого слоя интенсивностью $f(s)$ вдоль C. Импульсивные функции высших порядков строятся следующим образом:

$$\overset{|k|}{\Gamma}(C; x, y) = \overset{|k|}{\Gamma}(C) = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{1}{\Delta n} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta n}{\rho(s)}} \overset{|k-1|}{\Gamma}(C') - \overset{|k-1|}{\Gamma}(C) \right),$$

где $\rho(s)$ — радиус кривизны дуги C.

Имеют место следующие свойства:

$$\frac{\partial^k \Gamma(C)}{\partial s^k} = 0, \quad \frac{\partial \overset{|k|}{\Gamma}(C)}{\partial n} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{1}{\Delta n} \left(\overset{|k|}{\Gamma}(C') - \overset{|k|}{\Gamma}(C) \right) =$$

$$= \overset{|k+1|}{\Gamma}(C) + \frac{1}{\rho} \overset{|k|}{\Gamma}(C); \quad \iint\limits_{C+D \subset T} \overset{|k|}{\Gamma}(C) f(s)dxdy = \begin{cases} 0, & k > 1 \\ \int\limits_C f(s)ds, & k = 1. \end{cases}$$

$$\overset{|k|}{\Gamma}(C) f(x, y) = \overset{|k|}{\Gamma}(C) f(s) - \frac{(k-1)}{1} \overset{|k-1|}{\Gamma}(C) \frac{\partial f(s)}{\partial n} \cdots + (-1)^{k-1} \overset{|1|}{\Gamma}(C) \frac{\partial^{k-1} f(s)}{\partial n^{k-1}};$$

$$\iint\limits_{C \subset T} \overset{|k|}{\Gamma}(C) f(x, y)\, dxdy = (-1)^{k-1} \int\limits_C \frac{\partial^{k-1} f(s)}{\partial n^{k-1}} ds.$$

Последнее является обобщением формулы Хевисайда-Дирака, данной для одномерной области. Во всех предыдущих формулах подразумевается под $\frac{\partial^k f(s)}{\partial n^k} = \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial n^k}$ при $(x, y) \to C$ вдоль n в области D.

Рассмотрим простейший вид прерывной функции (1). Контурные частные производные от u запишутся на основании формального правила дифференцирования следующим образом:

$$\frac{\partial[u]}{\partial x}=\frac{\partial\Gamma(C)}{\partial x}\psi(x,y)+\Gamma(C)\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}=$$

$$=\left(\frac{\partial\Gamma(C)}{\partial s}\cos\alpha-\frac{\partial\Gamma(C)}{\partial n}\sin\alpha\right)\psi(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\overset{|1|}{\Gamma}(C)\,u(s)\sin\alpha.$$

Аналогично

$$\frac{\partial[u]}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\overset{|1|}{\Gamma}(C)\,u(s)\cos\alpha.$$

Таким образом, контурные производные приводят к производным в обычном смысле с добавлением импульсивных функций, распределенных вдоль линии разрыва функции u.

Легко показать также, что

$$\frac{\partial[u]}{\partial s}=\frac{\partial[u]}{\partial x}\cos\beta+\frac{\partial[u]}{\partial y}\sin\beta,$$

где $\beta=\angle(x,r)$.

Учитывая, при дальнейшем дифференцировании $\overset{|k|}{\Gamma}(C)f(s)$, что $\overset{|k|}{\Gamma}(C)$ следует считать постоянным в отношении переменной s, а $f(s)$ постоянным в отношении переменной n, можно получить контурные производные высших порядков. Например:

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\overset{|1|}{\Gamma}(C)\left(\frac{\partial u(s)}{\partial n}\sin^2\alpha-\frac{\partial u(s)}{\partial s}\sin 2\alpha-\frac{u(s)}{\rho}\cos 2\alpha\right)+$$

$$+\overset{|2|}{\Gamma}(C)u(s)\sin^2\alpha;$$

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\overset{|1|}{\Gamma}(C)\left(\frac{\partial u(s)}{\partial n}\cos 2\alpha-\frac{1}{\rho}u(s)\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\frac{\partial u(s)}{\partial n}\sin 2\alpha\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\overset{|2|}{\Gamma}(C)u(s)\sin 2\alpha.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2[u]}{\partial y\partial x},\qquad \text{если}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Если C имеет угловые точки s_i, то члены, содержащие $\frac{1}{\rho}$, вырождаются в этих точках в точечные импульсивные функции.

Аналогичным путем можно брать и высшие контурные производные. Можно показать, что если A_i, B_k и C_{p+s} постоянны, то

$$\iint\limits_{D+C\subset T}\left(\Sigma A_i\frac{\partial^i[u]}{\partial x^i}+\Sigma B_k\frac{\partial^k[u]}{\partial y^k}+\Sigma C_{p+s}\frac{\partial^{p+s}[u]}{\partial x^p\partial y^s}\right)dxdy=0.$$

В частности,

$$\iint\limits_{D+C\subset T}\left(\frac{\partial[v]}{\partial y}-\frac{\partial[u]}{\partial x}\right)dxdy=\iint\limits_{D\subset T}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy+\int\limits_C u(s)dy+v(s)dx=0.$$

Таким образом, при наличии потенциала сумма мер всех импульсивных функций равна нулю.

Суммированием контурных производных второго порядка получим:

$$\frac{\partial^2[u]}{\partial x^2}+\frac{\partial^2[u]}{\partial y^2}=q(x,y)+\overset{|2|}{\Gamma}(C)u(s)+\overset{|1|}{\Gamma}(C)\frac{\partial u(s)}{\partial n},$$

где

$$q(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Если u — функция гармоническая, то получим в результате интегрирования по области $D+C$: $\int\limits_C \frac{\partial u(s)}{\partial n}ds=0.$

Если $u=\Gamma(C)$, то получим

$$\frac{\partial^2\Gamma(C)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Gamma(C)}{\partial y^2}=\overset{|2|}{\Gamma}(C),$$

т. е. пришли к известной теореме Гаусса, выраженной в импульсивной форме.

При $q(x,y)=\dot{\Gamma}(x,y)$ решение для u известно:

$$u=-\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}.$$

Таким образом, имеем

$$u=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C+D\subset T}\left(\overset{|2|}{\Gamma}(C;\xi,\eta)u(s)+\overset{|1|}{\Gamma}(C;\xi,\eta)\frac{\partial u(s)}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+q(\xi,\eta)\right)\lg\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\xi d\eta.$$

После преобразований, на основе вышеприведенного,* получим:

$$u=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left(u(s)\frac{d\ln\frac{1}{r}}{dn}-\frac{\partial u(s)}{\partial n}\lg\frac{1}{r}\right)ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D\subset T}q(\xi,\eta)\lg\frac{1}{r}d\xi d\eta$$

Это—основная формула в теории потенциала.* Таким образом, здесь с одной общей точки зрения рассматривается обобщенная масса

$$q(x,y)+\overset{|2|}{\Gamma}(C)u(s)+\overset{|1|}{\Gamma}(C)\frac{\partial u(s)}{\partial n}.$$

---

* Можно показать, что аналогичные формулы могут быть легко составлены для любого линейного дифференциального уравнения. пользуясь понятием контурной производной.

Понятно, что сама масса $q(x,y)$ может включать в себе также некоторые импульсивные функции. Рассмотрим теперь некоторый потенциал $u_1 = u + v_1$, обладающий тем свойством, что нормальная производная не претерпевает скачка при пересечении C.

Тогда

$$\frac{\partial^2[u_1]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[u_1]}{\partial y^2} = \overset{|2|}{\Gamma}(C)\psi(s),$$

где $\psi(s)$ — скачок u_1 при пересечении C. Пусть теперь $u_2 = u + v_2$ является потенциалом, не имеющим разрыва непрерывности на C.

Тогда

$$\frac{\partial^2[u_2]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[u_2]}{\partial y^2} = \overset{|1|}{\Gamma}(C)\,\frac{\partial\psi(s)}{\partial n} = \overset{|1|}{\Gamma}(C) f(s),$$

где $f(s)$ — скачок нормальной производной u_2 при пересечении C. На основании предыдущего получим известные формулы:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \psi(s)\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds,$$

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_C f(s)\ln\frac{1}{r}\,ds.$$

Рассмотрим еще одно простейшее приложение теории импульсивных функций к задачам математической физики.

Пусть задано некоторое линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для $w(x,y)$ с постоянными или переменными коэфициентами, содержащее произвольный свободный член $q(x,y)$.

Положим, что решена какая-либо задача при *фиксированных* граничных условиях для области D и при *произвольном* $q(x,y)$ посредством определенной совокупности линейных операций L, так что

$$w = L[q(x,y)].$$

Рассмотрим решение

$$w^* = L\left(q(x,y) + \Sigma\overset{|i|}{\Gamma}(C_i)\, f_i(s)\right).$$

Здесь могут представиться несколько случаев. Если в области D заданы определенные члены $\overset{|i|}{\Gamma}(C_i) f_i(s)$ в качестве грузового члена, например, силы и моменты, то w^* представляет собой решение для данного случая при тех же граничных условиях.

Мы можем вдоль границы C области D приложить некоторые члены типа $\overset{|k|}{\Gamma}(C) f_k(s)$ и этим изменить самые граничные условия на контуре C при неизменности операций L.

Можно принять $f_k(s)$ неизвестными для удовлетворения каким-либо специальным условиям на границе, тогда они определятся из системы уравнений, если, например, $\overset{|k|}{\Gamma}(C) f_k(s)$ разложить в те же ряды, что и $q(x,y)$ при отыскании решения для w. Подбором $\sum \Gamma^{|k|}(C_i) f_k(s)$ можно из решения для w в области D найти решение для w^* в области D_1 при наперед заданных граничных требованиях уже на C_1. Аналогичным образом можно найти решение для области D с каким-либо вырезом в нем. По существу мы здесь имеем обобщенный метод наложения частных решений, причем к грузовому члену $q(x,y)$ могут добавляться в качестве нагрузки импульсивные функции необходимых порядков, могущие содержать самые контурные значения $w(s)$ и их производные.

Аналогично же может быть построена и теория импульсивных функций многих переменных.

Введение понятия о контурной производной было возможно в силу того, что столь существенно дискретная величина как импульсивная функция, оказалась наделенной свойствами непрерывных величин. Здесь мы имеем пример единства противоположностей, в данном случае единства непрерывного и дискретного. Это привело в свою очередь к единству граничных значений функции на C со значениями ее производных в D в дифференциальных уравнениях, выраженных в контурных производных.

Институт Строительных
Материалов и Сооружений
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1947, сентябрь.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Երկու փոփոխականների իմպուլսիվ ֆունկցիաների

սահմանումը

Աշխատության մեջ տրված են մի քանի փոփոխականների իմպուլսիվ ֆունկցիաների մեր կողմից մշակված տեսության որոշ արդյունքները։ Ցույց է տրված այդ տեսության կիրառական հնարավորությունները մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրներում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Назаров.* Изв. АН Арм. ССР (сер. естеств. наук), № 6. 1946.
2. *А. Г. Назаров.* ДАН Арм. ССР, 7, № 1, 1947.