

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Арм. ССР

К определению импульсивных функций

(Представлено 12 III 1947)

Определение импульсивных функций как некоторых операторов, данное Дираком и развитое нами, страдает некоторыми недостатками^(1,2,3).

Здесь мы пытаемся определить импульсивные функции, как специальным образом подобранные функциональные ряды, свойства которых лучше изучены.

Класс функций $\overset{\circ}{\Gamma}^{(n)}(x; \epsilon)$, подчиненных условию:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{a \leq 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{s-1}}{(s-1)!} \overset{\circ}{\Gamma}^{(n)}(\eta; \epsilon) d\eta = 1, \quad s = n$$

$$= 0, \quad s \neq n \quad (1)$$

и в остальном произвольных, условимся называть правой протяженной единичной импульсивной функцией n -го порядка.

Класс функций $\overset{1}{\Gamma}^{(n)}(x; \epsilon) = \overset{\circ}{\Gamma}^{(n)}(-x; \epsilon)$ назовем соответственно левой протяженной единичной импульсивной функцией n -го порядка.

На основании (1) должно иметь место:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{s-1}}{(s-1)!} \overset{1}{\Gamma}^{(n)}(\eta; \epsilon) d\eta = 1, \quad s = n$$

$$= 0, \quad s \neq n. \quad (2)$$

В тех случаях, когда не будем делать различия между $\overset{1}{\Gamma}$ и $\overset{\circ}{\Gamma}$, мы будем применять символ Γ .

Из (1) и (2) следует, что в общем случае

$$\int_{a < 0}^x \Gamma^{(n)}(\eta; \epsilon) d\eta = \overset{1}{\Gamma}^{(n-1)}(x; \epsilon) \quad (3)$$

$$\frac{d\Gamma^{[n]}(x; \varepsilon)}{dx} = \Gamma^{[n+1]}(x; \varepsilon) \quad (4)$$

вообще говоря не имеет места. Мы ограничим класс $\Gamma^{[n]}(x; \varepsilon)$ таким образом, чтобы всегда имело место (4). В дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Примеры протяженных импульсивных функций.

1. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{arctg} \frac{-\varepsilon}{x} = \frac{1}{2} \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon) + \frac{1}{2} \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon),$$

$$0 < x < \pi$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}}}{1 + e^{\frac{x}{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon) + \frac{1}{2} \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon).$$

2. Рассмотрим функцию $\Gamma^{[1]}(x; \varepsilon)$, повсюду тождественно равную нулю, кроме интервала $(-\varepsilon, 0)$, где она принимает, например, значение $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда, как нетрудно убедиться, на основании (2):

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\Gamma^{[1]}(x + \varepsilon'; \varepsilon') - \Gamma^{[1]}(x; \varepsilon') \right] = \Gamma^{[2]}(x; \varepsilon' + \varepsilon') = \Gamma^{[2]}(x; \varepsilon),$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left[\Gamma^{[2]}(x + \varepsilon''; \varepsilon' + \varepsilon'') - \Gamma^{[2]}(x; \varepsilon' + \varepsilon'') \right] = \Gamma^{[3]}(x; \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'') = \Gamma^{[3]}(x; \varepsilon), \quad (5)$$

и т. д., причем эти функции тождественно равны нулю повсюду, за исключением интервала $(-\varepsilon, 0)$.

При дифференцировании же мы не получаем протяженных импульсивных функций высшего порядка при принятом $\Gamma^{[1]}(x; \varepsilon)$, но, если указанным здесь путем построим $\Gamma^{[p]}(x; \varepsilon)$, где p достаточно велико, то в результате интегрирования получим $\Gamma^{[k]}(x; \varepsilon)$, при $k < p$, допускающее дифференцирование столько раз, сколько это необходимо, т. е. всегда можем удовлетворить условию (4).

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ исчезающая последовательность.

Тогда ряды

$$\Gamma^{[n]}(x) = \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon_1) + \left[\Gamma^{[n]}(x; \varepsilon_2) - \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon_1) \right] + \dots$$

$$+ \left[\Gamma^{[n]}(x; \varepsilon_k) - \Gamma^{[n]}(x; \varepsilon_{k-1}) \right] + \dots \quad (6)$$

соответственно назовем правой и левой единичными импульсивными функциями n -го порядка. Они повсюду тождественно равны нулю, кроме, быть может, точки особенности $x=0$.

Из определения следует

$$\frac{d\Gamma^{[n]}(x)}{dx} = \Gamma^{[n+1]}(x); \int_{a < 0}^x \Gamma^{[n]}(x) dx = \Gamma^{[n-1]}(x). \quad (7)$$

В частности^{*}

$$\int_{a \leq 0}^x \Gamma^{[0]}(x) dx = \Gamma^{[0]}(x) = 0, \quad x < 0 \\ = 1, \quad x > a; \quad \int_{a < 0}^x \Gamma^{[1]}(x) dx = \Gamma^{[1]}(x) = 0, \quad x < 0 \\ = 1, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

условимся называть соответственно правым и левым разрывным множителями.

Докажем, что

$$x^m \Gamma^{[n]}(x) = (-1)^m \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} \Gamma^{[n-m]}(x) \quad \text{при } m < n$$

$$x^m \Gamma^{[n]}(x) \equiv 0, \quad \text{при } m \geq n. \quad (9)$$

На основании (1), (2) и (6) имеем:

$$\int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{s-1}}{(s-1)!} \Gamma^{[n]}(\eta) d\eta = 1, \quad s = n \\ = 0, \quad s \neq n. \quad (10)$$

Возьмем от (9) p -кратный интеграл

$$A = \int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \eta^m \Gamma^{[n]}(\eta) d\eta.$$

Произведем замену

$$\eta^m = |(\eta - b) + b|^m,$$

тогда

$$A = (-1)^m \frac{(p+m-1)!}{(p-1)!} \int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{p+m-1}}{(p+m-1)!} \Gamma^{[n]}(\eta) d\eta + \\ + (-1)^{m-1} \frac{(p+m-2)!}{(p-1)!} \cdot \frac{mb}{1} \int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{p+m-2}}{(p+m-2)!} \Gamma^{[n]}(\eta) d\eta + \dots$$

* Изображение импульсивных функций в виде бесконечного ряда представляется своеобразным переходом к пределу для получения из $\Gamma^{[n]}(x; \varepsilon)$ импульсивной функции $\Gamma^{[n]}(x)$. С этой точки зрения интересно отметить, что для последовательности функций $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ бесконечный ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$ можно рассматривать как S_ω , где ω — трансфинитное число. Последовательность (S_k) находится в движении, соответствующий же ей ряд есть нечто завершенное, застывшее. Если (S_k) — исчезающая последовательность, т. е. бесконечно малая величина, то S_ω с рассматриваемой точки зрения есть актуальная бесконечно малая величина. Так же можно трактовать и актуальную бесконечно большую величину

$$\dots + b^m \int_{a < 0}^{b > 0} \frac{(b-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \Gamma^{[n]}(\eta) d\eta.$$

На основании (10) и при $b \rightarrow 0$, в силу его произвольности, когда $p+m \neq n$, $A=0$, а при $p+m=n$,

$$A = (-1)^m \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если $f(x)$ разлагается в ряд Тэйлора, то

$$\begin{aligned} \Gamma^{[n]}(x-a)f(x) &= f(a) \Gamma^{[n]}(x-a) - \frac{n-1}{1} f'(a) \Gamma^{[n-1]}(x-a) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-m} \frac{(n-1) \dots m}{(n-m)!} f^{[m]}(a) \Gamma^{[n-m]}(x-a) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} f^{[n-1]}(a) \Gamma^{[1]}(x-a). \end{aligned} \quad (11)$$

В частности,

$$\Gamma^{[1]}(x-a)f(x) = \Gamma^{[1]}(x-a)f(a).$$

Следствие 2. (Формула Хевисайда-Дирака).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{[n]}(x-a)f(x)dx = (-1)^{n-1} f^{[n-1]}(a). \quad (12)$$

Функцию $\varphi(x)$ со счетным множеством точек разрыва первого рода можно представить, как

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^+ \Gamma^{[0]}(x-c_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^- \Gamma^{[1]}(x-c_k),$$

где $\psi(x)$ — непрерывная функция. Если последняя допускает производную, то*

$$\frac{d[\varphi(x)]}{dx} = [\varphi(x)]' = \psi'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^+ \Gamma^{[1]}(x-c_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^- \Gamma^{[2]}(x-c_k)$$

будем называть контурной производной от $\varphi(x)$. Аналогично составляются контурные производные высших порядков.

• В частности, можно установить, на основании (9), что

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [\Gamma^{[n]}(x-a)f(x)] &= \Gamma^{[n]}(x-a)f(a) + \Gamma^{[n-1]}(x-a)f'(a) + \\ &+ \Gamma^{[1]}(x-a)f^{[n-1]}(a) + \Gamma^{[n]}(x-a)f^{(n)}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

n -кратное интегрирование этого уравнения приведет к разложению в ряд Тэйлора с точным значением остаточного члена.

* Символ $[]'$ означает, что производная взята в контурном смысле.

Наглядную геометрическую интерпретацию контурной производной можно дать, если иметь в виду, что $\frac{df(x+\xi)}{dx} = \frac{df(x+\xi)}{d\xi}$

Тогда

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(x+\Delta\xi) - \psi(x)}{\Delta\xi} = \psi'(x) \text{ и т. д.} \quad (13)$$

и

$$\frac{\Gamma(x+\Delta\xi) - \Gamma(x)}{\Delta\xi} = \Gamma^{(1)}(x; \Delta\xi)$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^0} [\Gamma(x+2\Delta\xi) - 2\Gamma(x+\Delta\xi) + \Gamma(x)] = \Gamma^{(2)}(x; \Delta\xi) \quad (14)$$

и т. д., т. е. условие (4) выполняется автоматически. Сравнить также (13) и (14) с (5).

В заключение отметим, что на фоне распределенной нагрузки импульсивные функции изображают некоторые сосредоточенные обобщенные силы (4). В частности, $\Gamma^{(1)}(x-a)$ и $\Gamma^{(2)}(x-a)$ означают единичные сосредоточенные силу и момент, приложенные в точке $x=a$.

Обстоятельство это облегчает решение некоторых задач техники с разрывными функциями.

Институт строительных
материалов и сооружений
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1947. март.

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Իմպուլսիվ Ֆունկցիաների սահմանումը

Աշխատության մեջ տրվում է իմպուլսիվ ֆունկցիաների սահմանումը, որպես հատուկ ձևով ընտրված ֆունկցիոնալ շարքեր: Այդ շարքերի անդամ առ անդամ դիֆերենցումը և ինտեգրումը բերում է իմպուլսիվ ֆունկցիաների կարգի բարձրացում և իջեցում:

A. G. Nazarov

On the Definition of Impulsive Functions

In this work the definition of impulsive functions as particularly selected functional series is given. The differentiation of members and integration of these series leads to an increase or decrease of the impulsive function order.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Dirac. „The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics“, Proc. of the Royal Society, 113, p. 621. 2. А. Г. Назаров. Изв. АН Арм. ССР (сер. естеств. наук), № 6, 1946. 3. Проф. А. И. Лурье. „Операционное исчисление в приложениях к задачам механики“.