

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О метрических признаках полноты системы полиномов
в неограниченных областях

(Представлено А. Л. Шагиняном 18 IV 1947)

А. Л. Шагиняном был доказан ряд теорем о полноте системы полиномов в неограниченных и в нежордановых областях (¹). В указанных теоремах были приведены метрические критерии, предельно точные в первом приближении, для полноты системы полиномов как в смысле равномерно-весаового приближения, так и для приближения в среднем.

В настоящей заметке мы приведем уточнения указанных теорем. При этом пользуемся двумя вспомогательными теоремами. Первая из них принадлежит Т. Карлеману, а вторая получается методами теории целых функций (²).

1. Пусть $\rho = \varphi(r) > 0$ — непрерывная, монотонная, бесконечно возрастающая при $r \rightarrow \infty$ и дифференцируемая функция от r ($r \geq r_0 > 0$), а $r = \psi(\rho)$ — обратная функция.

Пусть далее, $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел и

$$T(\rho) = \max_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{m_n} \quad (\rho > 0). \quad (1)$$

Функция $T(\rho)$ непрерывна, монотонно возрастает и стремится к бесконечности вместе с ρ (²).

*Теорема I.** (Т. Карлеман). Если $F(w)$ голоморфна в полуплоскости $\text{Im } w > 0$ и при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$|F(w)| \leq \frac{m_n}{[\varphi(r)]^n} \quad (r = |w| \geq r_0). \quad (2)$$

* В формулировке А. Островского.

тогда для тождества $F(w) \equiv 0$ достаточно расходимость интеграла

$$\int_{\varphi(r_0)}^{\infty} \log T(\rho) \cdot \frac{\psi'(\rho)}{[\psi(\rho)]^2} d\rho. \quad (3)$$

Условимся говорить, что функция $P(\rho)$ ($0 \leq \rho_0 \leq \rho < \infty$) принадлежит к классу A , если существует непрерывная, дифференцируемая функция $P_0(\rho)$ такая, что

- 1) $P(\rho) \geq P_0(\rho)$ при $\rho \geq \rho_1 > \rho_0$
- 2) Функция $\rho P_0'(\rho)$ не убывает и

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho P_0'(\rho) = +\infty.$$

Если $P(\rho) \in A$, тогда интегралы

$$M_n = \int_{\rho_1}^{\infty} e^{-P(\rho)} \rho^n d\rho \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

существуют.

Обозначим далее

$$T_k(\rho) = \max \frac{\rho^n}{\sqrt{M_{2n+k}}}, \quad (5')$$

где $k \geq 0$ — любое фиксированное целое число.

Теорема II. Если $P(\rho) \in A$, причем для соответствующей функции $P_0(\rho)$ интеграл

$$\int_{\rho_1}^{\infty} P_0(\rho) \frac{\psi'(\rho)}{[\psi(\rho)]^2} d\rho \quad (6)$$

расходится, тогда расходится также и интеграл

$$\int_{\rho_1}^{\infty} \log T_k(\rho) \frac{\psi'(\rho)}{[\psi(\rho)]^2} d\rho. \quad (7)$$

2. Пусть неограниченные односвязные области G_i ($i=1, 2, \dots, n$) не имеют общих точек и внешность области $G = \sum_1^n G_i$ содержит угол с раствором $\frac{\pi}{\alpha}$ ($-\frac{1}{2} < \alpha < \infty$). Обозначим через $e^{-P(\rho)}$ линейную меру дуг, отсекаемых областью G на окружности радиуса ρ с центром в начале координат.

Пусть функции $f_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) голоморфны в соответствующих областях G_i ($i=1, 2, \dots, n$) и удовлетворяют условиям:

$$\int_{G_i} |f_i(z)|^2 |dz|^2 < +\infty \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Доказывается

Теорема III₁. Если для областей G_i ($i=1, 2, \dots, n$) функция $P(\rho)$ принадлежит к классу A , причем для соответствующей функции $P_0(\rho)$

$$\int_0^\infty \frac{P_0(\rho)}{\rho^{1+\alpha}} d\rho = +\infty, \quad (9)$$

тогда будем иметь

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{G_i} |f_i(z) - P(z)|^2 |dz|^2 \right\} = 0, \quad (10)$$

где $\{P\}$ — всевозможные полиномы.

3. Пусть кусочно гладкие неограниченные линии L_j ($j=1, 2, \dots, n$) не имеют петель, взаимно не пересекаются и каждый из них только одним концом удаляется в бесконечность.

Допустим, что начиная с некоторого $\rho = |z| \geq \rho_0$, длины дуг σ_j линий L_j являются однозначными функциями от ρ , при этом

$$0 \leq \frac{d\sigma_j}{d\rho} \leq B, \quad \text{где } B \text{ — постоянная, не зависящая от } \rho.$$

Предположим теперь, что на линиях L_j заданы вещественные функции $F_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, n$), принадлежащие к классу A с соответствующими функциями $P_{0j}(\rho)$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Теорема IV₁. Пусть внешность линии $L = \sum_{j=1}^n L_j$ содержит неко-

торый угол с раствором $\frac{\pi}{\alpha}$ ($\frac{1}{2} < \alpha < \infty$), и интегралы

$$\int_0^\infty \frac{P_{0j}(\rho)}{\rho^{1+\alpha}} d\rho \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

расходятся. Для любых измеримых функций $f_j(z)$, заданных на линиях L_j , для которых

$$\int_{L_j} e^{-P_j(z)} |f_j(z)|^2 d\sigma_j < +\infty \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

имеет место равенство

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{L_j} |f_j(z) - P(z)|^2 d\sigma_j \right\} = 0, \quad (13)$$

где $\{P\}$ — всевозможные полиномы.

Теорема III₂. Если известно, что все области G , теоремы III₁, лежат внутри некоторой параболы, то (10) имеет место при

$$\int \frac{P_0(\rho)}{\rho^{3/2}} d\rho = +\infty. \quad (14)$$

Теорема IV₂. Если известно, что все линии L , теоремы IV₁, лежат внутри некоторой параболы, то (13) выполняется при

$$\int \frac{P_{0j}(\rho)}{\rho^{3/2}} d\rho = +\infty \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Заметим, что если при $\rho \geq \rho_0$

$$P(\rho) \geq \frac{\rho^\alpha}{\lg \rho \cdot \lg^2 \rho \cdot \dots \cdot \lg^n \rho}, \quad (16)$$

где $\lg^k \rho = \lg(\lg^{k-1} \rho)$, $n \geq 1$ — любое целое число, то $P(\rho) \in A$, $P_0(\rho) = P(\rho)$ и

$$\int \frac{P(\rho)}{\rho^{1+\alpha}} d\rho = +\infty.$$

4. Пусть бесконечная односвязная область G лежит внутри некоторой полосы $|\operatorname{Im} z| \leq a$ и топологически эквивалентна ей. Обозначим через $e^{-P(\rho)}$ линейную меру дуг, отсекаемых областью G на окружности радиуса ρ с центром в начале координат.

Теорема V. Пусть для области G $P(\rho) \in A$, причем для соответствующей функции $P_0(\rho)$

$$\int \frac{P_0(\rho)}{\rho^2} d\rho = +\infty. \quad (17)$$

Тогда для всякой голоморфной в G функции $f(z)$ с конечным интегралом

$$\int \int_G |f(z)|^2 |dz|^2$$

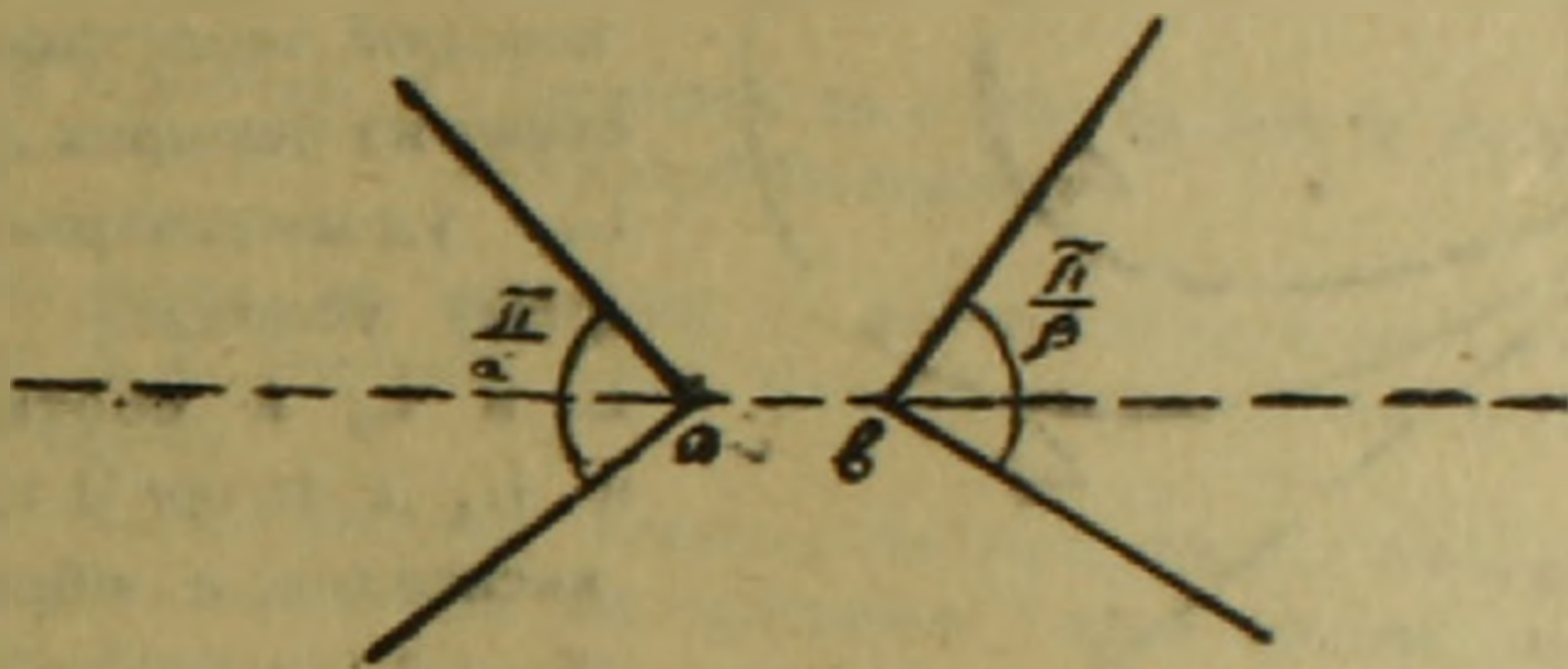
будем иметь:

$$\inf \int \int_G |f(z) - P(z)|^2 |dz|^2 = 0.$$

Обозначим через $G_{\alpha, \beta}$ бесконечную область, топологически эквивалентную бесконечной полосе, лежащую во внешности $\Delta_{\alpha, \beta}$ некоторых углов $\frac{\pi}{\alpha}$ и $\frac{\pi}{\beta}$ с вершинами в точках a и b вещественной оси (черт. 1).

Теорема VI₁. Пусть для области $G_{\alpha, \beta}$ функция $P(\rho)$ удовлетворяет неравенству

$$P(\rho) \geq \frac{\rho^m}{\lg \rho \cdot \lg^2 \rho \cdot \dots \cdot \lg^n \rho} \quad (\rho \geq \rho_1), \quad (18)$$



Черт. 1.

где $\omega = \max(\alpha, \beta)$, а $n > 1$ — произвольное целое число. Для всякой голоморфной в $G_{\alpha, \beta}$ функции $f(z)$, для которой

$$\iint_{G_{\alpha, \beta}} |f(z)|^2 |dz|^2 < +\infty,$$

и имеет место равенство

$$\inf \iint_{G_{\alpha, \beta}} |f(z) - P(z)|^2 |dz|^2 = 0.$$

5. Пусть кусочно гладкая неограниченная линия L , не имеющая петель, лежит внутри $\Delta_{\alpha, \beta}$ и обоими концами удаляется в бесконечность. Допустим, что начиная с некоторого $\rho = |z| > \rho_0$ длина дуг обеих ветвей линии L суть однозначная функция от ρ и $0 \leq \frac{d\sigma}{d\rho} \leq B$, где B — постоянная.

Теорема VI₂. Если на линии L задана вещественная функция $P(z) \in A$, удовлетворяющая условию (18), тогда равенство

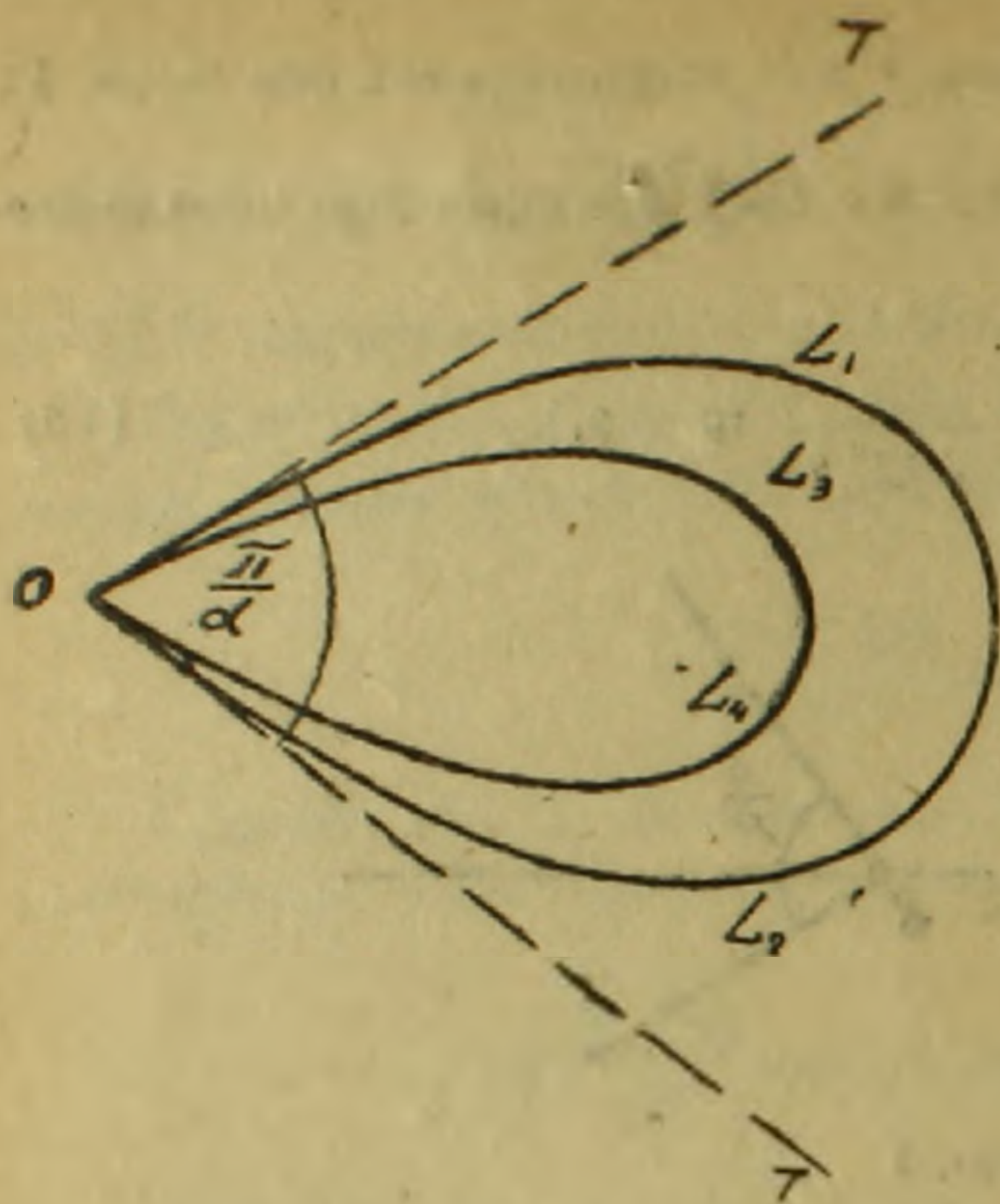
$$\inf \int_L e^{-P(z)} |f(z) - P(z)|^2 d\sigma = 0$$

выполняется для всякой измеримой на L функции $f(z)$, для которой интеграл

$$\int_L e^{-P(z)} |f(z)|^2 d\sigma$$

существует.

В случае, когда $\alpha = \beta = 1$, условие (18) можно заменить более общим условием (17).



Черт. 2.

6. Пусть односвязная область D_0 топологически эквивалентна области, ограниченной двумя внутренне-соприкасающимися окружностями. Поместим начало координат в кратной граничной точке O . Допустим, что граница области в некоторой окрестности начала состоит из четырех дуг L_1, L_2, L_3, L_4 , удовлетворяющих следующему условию:

L_1 и L_2 и соответственно L_3 и L_4 в точке O имеют общие касательные, образующие угол $\frac{\pi}{\alpha}$ ($\frac{1}{2} < \alpha < \infty$) (черт. 2).

Обозначим через $e^{-P(\rho)}$ линейную меру дуг, отсекаемых об-

ластью D_0 на окружности $|z| = \rho$.

Теорема VII. Если для области D_0 функция $P(\rho)$ удовлетворяет неравенству

$$P(\rho) \geq \frac{1}{\rho^\alpha \lg \frac{1}{\rho} \cdot \lg^2 \frac{1}{\rho} \cdots \lg^n \frac{1}{\rho}}, \quad (n > 1)$$

при $0 < \rho < \rho_0$, тогда равенство

$$\inf \int \int_{D_0} |f(z) - P(z)|^2 |dz|^2 = 0$$

выполняется для всякой голоморфной в D_0 функции, для которой интеграл

$$\int \int_{D_0} |f(z)|^2 |dz|^2$$

существует.

Заметим, что теоремы, приведенные здесь, значительно уточнить нельзя, потому что, как показал А. Л. Шагинян (³), при сходимости приведенных интегралов полнота, вообще говоря, не имеет места.

Сектор математики
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1947, март.

Անսահմանության պայմաններում պոլինոմիների սխեմի լրիվության
համար հայտանքների մասին

Ներկա հոդվածում բերվում են Ա. Լ. Շահինյանի կողմից անսահմանության պայմաններում պոլինոմիների սխեմի լրիվության համար ստացված մի շարք հայտանքների ընդհանրացումները:

M. M. Jirbashian

On the Metrical Criterion of Completeness of the System of Polynomials in
Unlimited Domains

In the present paper an expansion of indicators is given, which has recently been received by A. L. Shahinian (¹) on the completeness of the system of polynomials in unlimited domains.

According to this, two auxiliary theorems are used; the first belonging to Carleman while the second is received by the methods of entire functions theory (²).

Using these theorems among others we prove, for example, the following theorem.

Let unlimited simply connected domains G_i ($i=1, 2, \dots, n$) have no common points. Suppose that the exterior of domain $G = \sum_{i=1}^n G_i$ contains an angle with an open $\frac{\pi}{\alpha}$ ($\frac{1}{2} < \alpha < \infty$). Let us mark by $e^{-P(\rho)}$ the sum of those arcs of circumference $|z| = \rho$ which are included in domain G .

Let functions $f_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) be holomorph in domains G_i respectively and integrals

$$\iint_{G_i} |f_i(z)|^2 |dz|^2 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

are finite.

Theorem. If for domain G the function $P(\rho)$ holds the following conditions,

1) There exists a continuous differentiable function $P_0(\rho)$ such that $P(\rho) > P_0(\rho)$ when $\rho > \rho_0$.

2) The function $\rho P'_0(\rho)$ does not decrease and $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho P'_0(\rho) = +\infty$.

$$3) \quad \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{P_0(\rho)}{\rho^{1+\alpha}} d\rho = +\infty,$$

then we have

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} |f_i(z) - P(z)|^2 |dz|^2 \right\} = 0,$$

where $\{P\}$ is all possible polynomials.

Note that the theorem is true if

$$P(\rho) > \frac{\rho^\alpha}{\lg \rho \cdot \lg^2 \rho \cdot \dots \cdot \lg^n \rho} \quad (\rho > \rho_0),$$

where $\lg^k \rho = \lg(\lg^{k-1} \rho)$ and $n > 1$ is arbitrary integer. It is impossible to correct considerably the given theorems further (*).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Шагинян. ДАН СССР, 14, № 2, 1944; 15, № 2, 1944, 48, № 1, 1945.
2. С. Мандельброт. Квазианалитические функции, Москва, 1937, 3. А. Л. Шагинян. ДАН Арм. ССР, 5, № 4, 1946.