ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
VI 1947 5

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге

(Представлено А. Л. Шагиняном 17 III 1947)

Отнесем к классу $H_p(\alpha)$ $(p>0, \alpha>-1)$ все функции $f(z)$, голоморфные в $|z|<1$, для которых интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|f(\rho e^{i\vartheta})|^p\rho d\rho d\vartheta \tag{1}$$

существует. Было доказано (¹), что *всякая функция $f(z)$ класса $H_p(\alpha)$ $(p\geq 1, \alpha>-1)$ представима интегралом*

$$f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{f(\rho e^{i\vartheta})}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta \tag{2}$$

в единичном круге $|z|<1$.

В настоящей заметке мы устанавливаем определенную связь между классом функций $H_p(\alpha)$ и классом функций H_p Рисса (²). Приводим некоторые теоремы о параметрическом представлении и единственности функций класса $H_p(\alpha)$. Эти теоремы позволяют обобщить и распространить на классы $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ некоторые теоремы о полноте системы рациональных функций в единичном круге, доказанные ранее другими авторами (³·⁴) для класса H_p Рисса.

1. Доказываются следующие предложения.

Теорема I. Для того, чтобы функция $f(z)$ класса $H_p(\alpha)$ $(p>0, \alpha>-1)$ принадлежала к классу H_p Рисса, необходимо и достаточно, чтобы интегралы (1) были равномерно ограничены при $\alpha\to-1$.

Пусть $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ некоторая последовательность комплексных чисел внутри единичного круга, причем $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|=1$.

Теорема II_1. *Если функция* $f(z)$ *принадлежит к классу* $H_p(\alpha)$ и $f(\alpha_n)=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, *тогда при*

а) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}(1-|\alpha_n|)\, n > \frac{1+\alpha}{p}, \tag{3}$$

или при

б) $$|\alpha_n| < 1-\frac{k}{n} \text{ при } n > n_0, \text{ где } k > \frac{1+\alpha}{p}, \tag{4}$$

будет $f(z)\equiv 0$.

Можно доказать более общую теорему единственности для класса $H_p(\alpha)$, откуда будет следовать теорема II_1.

Теорема II_2. *Если* $f(z)\subset H_p(\alpha)$ и $f(\alpha_n)=0$ $(n=0, 1, 2 \ldots)$, *тогда* $f(z)\equiv 0$ *при*

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha} e^{pN(r)}\,dr = +\infty, \tag{5}$$

где

$$N(r)=\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

а $n(t)$ *означает число точек* α_n *в замкнутом круге* $|z|\leqslant t$, *при этом нули функции* $f(z)$ *берутся соответственно их кратности.*

Теорема III_1. *Если* $f(z)\subset H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$, *то функция*

$$\varphi_0(z)=\frac{\alpha+1}{2}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\rho z)\,d\rho \tag{6}$$

принадлежит к классу H_2 *Рисса в единичном круге, причем*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \varphi_0(t)\frac{|dt|}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}} \quad (|z|<1). \tag{7}$$

При $\alpha=0$ эта теорема впервые доказана М. В. Келдышем.*

Теорема III_2. *Функции класса* $H_2(\alpha)$ *представимы в параметрическом виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \varphi(t)\frac{|dt|}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}, \tag{8}$$

где $\varphi(t)$ *произвольная функция интегрируемая с квадратом модуля на* $|t|=1$.

---

* Об этом, в устной беседе, мне любезно сообщил М. В. Келдыш.

Функция (6) минимизирует интеграл

$$\int\limits_{|t|=1} |\varphi(t)|^2 \, |dt|$$

в семействе функций $\varphi(t)$, *интегрируемых с квадратом модуля на* $|t|=1$ *и представляющих данную функцию* $f(z)$ *класса* $H_2(\alpha)$ *в виде (8).*

Теорема IV. Для функций класса $H_2(\alpha)$ *имеет место следующее интегральное представление*

$$f_F(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \, \frac{F(\rho,\vartheta)}{(1-z\rho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}} \, \rho d\rho d\vartheta \,, \tag{9}$$

где $F(\rho,\vartheta)$ *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \, |F(\rho,\vartheta)|^2 \rho d\rho d\vartheta < +\infty \tag{10}$$

Функция $f_F(z)$ *минимизирует интеграл*

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \, |F(\rho,\vartheta) - f(\rho e^{i\vartheta})|^2 \rho d\rho d\vartheta \tag{11}$$

в классе функций $H_2(\alpha)$.

При $\alpha=0$ результат теоремы IV был установлен впервые Wirtinger'ом [4,5].

2. Пусть $\{\alpha_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — некоторая последовательность неравных комплексных чисел, лежащих внутри $|z|<1$, расположенных в порядке возрастания модулей и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 1$.

Рассмотрим систему линейно независимых функций

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{(1-\bar{\alpha}_n z)^{\alpha+2}} \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

В силу (2)

$$\varphi_k(z_m) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \, \varphi_k(\rho e^{i\vartheta}) \overline{\varphi_m(\rho e^{i\vartheta})} \, \rho d\rho d\vartheta \,. \tag{13}$$

Функции $\Phi_n(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ определяются единственным образом из условий

1) $\Phi_n(z)$ является линейной комбинацией от

$$\varphi_0(z), \ \varphi_1(z), \ \ldots, \ \varphi_n(z).$$

$$2)\qquad \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\Phi_m(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Phi_n(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \tag{14}$$

Имея в виду (13), можно показать, что

$$\Phi_n(\alpha_0)=\Phi_n(\alpha_1)=\ldots=\Phi_n(\alpha_{n-1})=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{15}$$

Теорема V. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ *удовлетворяет одному из приведенных выше условий (3), (4) или (5) при* $p=2$, *тогда для всякой функции* $f(z)\subset H_2(\alpha)$ *будем иметь*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\left|f(\rho e^{i\vartheta})-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})\right|^2\rho d\rho d\vartheta=0, \tag{16}$$

где

$$a_k=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}f(\rho e^{i\vartheta})\overline{\Phi_k(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta. \tag{17}$$

В каждой замкнутой части $|z|<1$ *имеем равномерно*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi_k(z), \tag{18}$$

а в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ *имеем равномерно*

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z|)^{\alpha+2}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)\right|=0. \tag{19}$$

Заметим, что в силу (15), коэфициенты $\{a_k\}$ определяются из рекурентных соотношений

$$f(\alpha_n)=a_0\Phi_0(\alpha_n)+a_1\Phi_1(\alpha_n)+\ldots+a_n\Phi_n(\alpha_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{20}$$

Следствие. В условиях теоремы V, при $|w|<1$ и $|z|<1$ имеем:

$$\frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\Phi_k(w)}\,\Phi_k(z). \tag{21}$$

Соответствующую теорему для класса функций H_2 доказал Такенака (3).

Теорема VI. При выполнении хотя бы одного из следующих трех условий

1. $\varliminf_{n\to\infty}(1-|\alpha_n|)\,n>\alpha-1>0$

2. $|\alpha_n|<1-\dfrac{k}{n}$, при $n>n_0$, где $k\geqslant\alpha-1$

3. $$\int_0^1 (1-r)^{2\alpha-3}\, e^{2N(r)}\, dr = +\infty .$$

Для всякой функции $f(z)$, *принадлежащей к классу* H_2 *Рисса в* $|z|<1$, *будем иметь*

$$\inf_{\{R\}} \int_{|z|=1} |f(z)-R(z)|^2\, |dz| = 0 ,$$

где $\{R\}$ *всевозможные функции вида*

$$R(z)=\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(1-\bar{\alpha}_k z)^2} . \tag{22}$$

В случае $\alpha=1$ существует необходимое и достаточное условие для полноты ([3]).

Теорема VII. Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ *удовлетворяет условию теоремы V. Для того, чтобы существовала функция* $f(z)$ *класса* $H_2(\alpha)$, *принимающая значения* $f(\alpha_n)$ *в точках* $\{\alpha_n\}$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_0^{\infty} |a_k|^2 \tag{23}$$

был сходящимся, где $\{a_k\}$ *суть коэфициенты, полученные из рекурентных соотношений (20).*

При существовании функция $f(z)$ *является единственной и дается рядом*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z),$$

который сходится в среднем к $f(z)$ *по площади* $|z|<1$ *при наличии веса* $(1-\rho^2)^{\alpha}$.

Сектор математики
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1947, февраль.

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացնելիության մասին

Այս հոդվածում սահմանված է միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H_p(\alpha)$ *դասը տեսքի (1) ինտեգրալի միջոցով։ Հաստատված է որոշ առնչություն* $H_p(\alpha)$ *դասի և միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների Ռիսսի* H_p *դասի միջև։ Բերված են թեորեմներ* $H_2(\alpha)$ *դասի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացման և միակության մասին։*

Վերջիններս թույլ են տալիս հաստատել $H_2(\alpha)$ դասում ռացիոնալ ֆունկցիաների (12) դասի լրիվությունը։

Այստեղ բերված արդյունքները հանդիսանում են այլ հեղինակների կողմից [2,3,4,5] Ռիսսի H_p դասի համար ապացուցված թեորեմների ընդհանրացումները։

M. M. Jirbashian

On the Representation of Certain Classes of Functions Holomorph in the Unit Circle

In the present paper a definition of the $H_p(\alpha)$ class of functions holomorph in the unit circle is given by means of the (1) integral of the text. A certain connection is ascertained between the $H_p(\alpha)$ class and Riesz's H_p class of functions holomorph in the unit circle. Some theorems are given on parametric re presentation and uniqueness of functions belonging to the $H_2(\alpha)$ class.

The latter gives us possibility to ascertain in the $H_2(\alpha)$ class the completeness of the rational functions of class (12).

The results obtained are the generalization of proved theorems given by other authors [2,3,4,5] for Riesz's H_p class.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* ДАН Арм. ССР. **3**. № 1, 1945. 2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. Москва, 1941. 3. *S. Takenaka.* Japanese journal of Math. **2**, 1925. 4. *J. L. Walsh.* „Interpolation and approximation by rational functions" American Math. soc. Col. ser, **20**. 5. *W. Wirtinger.* Monatshefte für Math. und Physik. **39**, 1932.