ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
VI 1947 4

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян

О скорости приближения аналитических функций полиномами в замкнутых областях

(Представлено А. Л. Шагиняном 15 III 1947)

1. Известно (1), что для равномерного приближения полиномами ограниченной замкнутой области D к функциям, аналитическим в области D и непрерывным вплоть до контура, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к $\bar{D}$ состояло из одной области, содержащей бесконечно удаленную точку.

В случае, когда область D ограничена аналитической кривой, установлено (2), что скорость упомянутого выше приближения, т. е. нижняя грань выражения

$$\max_{z \in \bar{D}} | f(z) - P_n(z) |$$

по всевозможным полиномам степени $\leqslant n$, зависит от поведения функции $f(z)$ на границе области D, и будет порядка $c \cdot n^{-p}$, если $f(z)$ имеет контурные производные порядка $p+1$.

В настоящей заметке рассматривается общий случай областей ограниченных неаналитическими кривыми.

Теорема 1. Для любой, как угодно медленно монотонно убывающей функции $\varphi(n)$ *существует жорданова область* D *и функция* $f(z)$, *регулярная в* D, *непрерывная в* $\bar{D}$, *имеющая контурные производные любого наперед заданного порядка, так что для достаточно больших значений* n *выполняется неравенство*

$$\max_{z \in \bar{D}} | f(z) - P_n(z) | > \varphi(n)$$

для всевозможных полиномов степени n.

Замечание. В этом случае, очевидно, медленность приближения следует приписать исключительно плохому поведению границы области, являющейся, однако, жордановой.

Пусть $\sigma(\zeta,r)$ означает плоскую меру той части дополнения к D, которая расположена в кругу радиуса r с центром в точке ζ.

Теорема 2. Если жорданова область D *такова, что для некоторой ее граничной точки* ζ_0 *выполняются условия:*

1. Существует луч, исходящий из точки ζ_0 *и не пересекающийся с областью* D,

2. При достаточно малых значениях r *и для некоторой, монотонно возрастающей к бесконечности при* $r \to 0$ *функции* $\psi(r)$ *выполняется неравенство*

$$\sigma(\zeta_0, r) < e^{-\psi(r)},$$

то для любых полиномов степени n *и для достаточно больших значений* n

$$\max_{z \in \overline{D}} | f(z) - P_n(z) | > \left[\psi^{-1}(n)\right]^c \text{(c—const.)},$$

где f(z) *аналитична в* D, *непрерывна в* $\overline{D}$ *и имеет контурные производные любого наперед заданного порядка.*

Замечание. Теорема 2, таким образом, дает возможность оценить количественно, как влияет ухудшение контура на скорость полиномиальных приближений при сохранении тех же предположений относительно достаточно хорошего поведения функции на границе области.

Теорема 3. Для любой, как угодно медленно монотонно убывающей функции $\varphi(n)$ *существует функция* f(z), *регулярная внутри единичного круга, непрерывная вплоть до контура* $|z| = 1$, *такая, что для любых полиномов степени* n *будем иметь*

$$\max_{|z| \leqslant 1} | f(z) - P_n(z) | > \varphi(n)$$

для достаточно больших значений n.

Замечание. Из условий теоремы следует, что, в противоположность теореме 1, в данном случае медленность приближения следует отнести исключительно за счет плохого поведения самой функции на границе области.

Доказательство теоремы 1. Для любой жордановой области B и любого полинома степени n, $-Q_n(z)$, имеем

$$\iint_B | f(z) - Q_n(z) |^2 dx dy \geqslant \iint_B | f(z) - \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(z) |^2 dx dy,$$

где полиномы $\{P_n(z)\}$ обладают тем свойством, что

$$\iint_B P_n(z)\overline{P_m(z)}\, dx dy = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \begin{matrix} n \neq m \\ n = m \end{matrix}$$

т. е. являются ортонормальными по B, а

$$C_k = \iint_B f(z)\,\overline{P_k(z)}\,dxdy, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть область B содержит круг радиуса $2r$ и сама содержится внутри единичного круга.

Применяя принцип максимума, не трудно показать, что

$$|P_n(z)| < \left(\frac{2}{r}\right)^n \quad (|z| \leqslant 1).$$

Система полиномов не полна в кругу $|z| < \rho$ с разрезом вдоль $\arg z = 0$, следовательно, существует отличная от нуля нижняя грань выражения

$$\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} |z^{p+1/2} - Q_n(z)|^2 \rho d\rho d\varphi \geqslant \alpha_p > 0 \quad (p\text{-фикс.})$$

относительно всевозможных полиномов любых степеней; вычислим это выражение, которое будет являться, очевидно, функцией ρ, $-\alpha_p = \alpha_p(\rho)$.

Преобразование $w = cz$ дает

$$\int_0^{c\rho} \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} |w^{p+1/2} - Q_m(w)|^2 d\varphi = c^{2p+3} \int_0^{\rho} \rho d\rho \int_0^{2\pi} |z^{p+1/2} - P_m(z)|^2 d\varphi,$$

откуда, полагая $c = \frac{1}{\rho}$, не трудно вывести, что

$$\alpha_p(\rho) = \alpha_p(1)\rho^{3+2p}; \quad \alpha_p(1) < \alpha_0(1),$$

где $\alpha_0(1) = \alpha_0$ — абсолютная постоянная.

Определим теперь целые числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ из условий:

1. $\varphi(k_n) < 2^{-3(p+1)n}$
2. $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$

и положим для краткости

$$z_n = 2^{-3nk^{n+1}}.$$

Перейдем к построению области D.

Через D_0 обозначим круг $|z| < 1$ без полуполосы:

$$|y| \leqslant \varepsilon_0, \quad x \geqslant 0$$

через D_1 круг $|z| < 1$ без двух полуполос:

$$|y| < \varepsilon_0, x \geqslant \frac{1}{2}; \quad |y| \leqslant \varepsilon_1, \quad x \geqslant 0$$

через D_1 круг $|z|<1$ без трех полуполос:

$$|y|\leqslant\varepsilon_0,\ x\geqslant\frac{1}{2};\ |y|\leqslant\varepsilon_1,\ x\geqslant\frac{1}{2^2}$$

$$|y|\leqslant\varepsilon_2\ x\geqslant 0$$

и т. д., наконец, через D_m—область, получающуюся из единичного круга выбрасыванием $m+1$ полуполосы

$$|y|\leqslant\varepsilon_0,\ \ x\geqslant\frac{1}{2};\ \ |y|\leqslant\varepsilon_1,\ \ x\geqslant\frac{1}{2^2};\ \ldots,$$

$$|y|\leqslant\varepsilon_{m-1},\ x\geqslant\frac{1}{2^m};\ \ |y|<\varepsilon_m,\ x\geqslant 0.$$

Пусть $D=D_0+D_1+\ \ldots$; через G_m обозначим

круг $|z|<\frac{1}{2^m}$ без полуполосы $|y|<\varepsilon_m,\ x>0$,

а через R_m—ту часть полуполосы $|y|\leqslant\varepsilon_m,\ x\geqslant 0$,

которая заключается в кругу $|z|<\frac{1}{2^m}$.

Покажем, что для любых полиномов

$$\iint\limits_{G_m}|z^p\sqrt{z}-P_{k_{m+1}}(z)|^2dxdy>\alpha_p\ \ 1)\ 2^{-m(3+2p)-1}.$$

Действительно, если бы имело место обратное, то, замечая, что

$$\iint\limits_{R_m}|z^p\sqrt{z}-P_{k_{m+1}}(z)|^2dxdy<\operatorname{mes}R_m\left(2^{m+2}\right)^{k_{m+1}}<2^{-m(3+2p)-m},$$

мы имели бы

$$\iint\limits_{|z|<\frac{1}{2^m}}|z^p\sqrt{z}-P_{k_{m+1}}(z)|^2dxdy<\alpha_p\ (1)\,2^{-m(3+2p)}=\alpha_p\left(\frac{1}{2^m}\right),$$

чего не может быть согласно определению чисел $\alpha_p\left(\frac{1}{2^m}\right)$.

Но, при любых $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеем

$$G_m\in D_m\in D,$$

поэтому

$$\iint\limits_{D}|z^p\sqrt{z}-P_{k_{m+1}}(z)|^2dxdy>2^{-3(p+1)m}>\varphi(k_m)>\varphi(k_{m+1}).$$

Пусть существует последовательность чисел $\{m_p\}$ такая, что

$$\iint\limits_{D}|z^p\sqrt{z}-Pm_n(z)|^2dxdy<\varphi(m_n),$$

Выберем k_q так, чтобы $k_q < m_n < k_{q+1}$.

Имеем очевидную цепь неравенств

$$\iint\limits_D |\, z^p\sqrt{z} - P_{m_n}(z)\,|^2 dxdy > \iint\limits_D |\, z^p\sqrt{z} - P_{k_q+1}(z)\,|^2 dxdy >$$

$$> \varphi(k_q) > \varphi(m_n),$$

что противоречит сделанному допущению. Заметим теперь, что

$$\max_{z\in\overline{D}} |\, z^p\sqrt{z} - P_n(z)\,|^2 C > \iint\limits_D |\, z^p\sqrt{z} - P_n(z)\,|^2 dxdy > \varphi(n),$$

откуда и следует, что

$$\max_{z\in\overline{D}} |\, z^p\sqrt{z} - P_n(z)\,| > \varphi(n), \quad n > n_0.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично приведенному выше доказательству, причем, за функцию $f(z)$ достаточно взять

$$(z-\zeta_0)^{p+1/2},$$

где p—любое целое число.

Таким образом, в случае областей ограниченных неаналитическими кривыми на скорость приближения влияют два фактора—с одной стороны, граничные свойства аппроксимируемых функций, с другой стороны—свойства самой области.

2. Рассмотрим функцию $f(z)$, регулярную в $|z| < 1$, ряд Тэйлора которой абсолютно сходится на $|z| = 1$ и имеет лакуны:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Обозначим

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k|^2 = \varphi^2(p).$$

Теорема 4. Если существует $\lambda > 1$, *так, что* $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda$, *то для любого полинома степени* n:

$$\max_{|z|<1} |f(z) - P_n(z)| > c \cdot \varphi\left[\frac{\ln n}{\ln\lambda}\right].$$

Замечание. Оценка в теореме точная, т. к. для некоторых $f(z)$ знак равенства имеет место для всех n.

Оценим теперь скорость приближения в терминах модуля непрерывности.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$, непрерывна в $|z| < 1$, а $\omega(\delta)$ означает ее модуль непрерывности. Имеет место

Теорема 5. Для любого полинома степени n:

$$\rho_n = \max_{|z|<1} |f(z)-P_n(z)| \geqslant \max_{0<\delta<1} \left\{ \omega(\delta)-n\cdot\delta \right\}.$$

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

В частности, если $\omega(\delta) \cong \delta^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ имеем $\rho_n > n$ — неравенство, при достаточно малых α близкое к известным уже неравенствам, а при

$$\omega(\delta) \cong \frac{1}{\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k}\frac{1}{\delta}}$$

имеем

$$\rho_n > \frac{1}{\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k} n}.$$

Теорема 3 является, разумеется, простым следствием любой из теорем 4, 5.

3. Пусть области D_1 и D_2 типа, описанного в начале настоящей заметки, имеют только одну общую граничную точку A.

Доказано ([3]), что каковы бы ни были функции f_1 и f_2 регулярные в D_1 и D_2 соответственно, непрерывные вплоть до контуров и принимающие в A одинаковые значения, величина $\mu(n) \to 0$ при $n \to \infty$, где через $\mu(n)$ обозначена нижняя грань выражения

$$\max_{z\in\overline{D}_1} |f_1(z)-P_n(z)| + \max_{z\in\overline{D}_2} |f_2(z)-P_n(z)|$$

относительно всевозможных полиномов степени n, т. е. доказано, что возможна одновременная аппроксимация в D_1 и D_2.

Для любой монотонно убывающей к нулю функции $\varphi(n)$ и любого целого числа p можно построить пару областей D_1 и D_2 с одной общей граничной точкой и функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, так, что скорость приближения в D_1 к $f_1(z)$, равно как и скорость приближения к $f_2(z)$ в D_2, будет порядка n^{-p}, однако, скорость одновроменного приближения в D_1 к $f_1(z)$, а в D_2 к $f_2(z)$, т. е. величина $\mu(n)$, будет удовлетворять неравенству $\mu(n) > \varphi(n)$.

Этим доказывается, что в случае одновременного приближения в двух областях, скорость этого приближения зависит как от свойств каждой из областей D_1 и D_2 и поведения функций на их границах, т. е. как от скоростей приближения отдельно в D_1 к $f_1(z)$, в D_2 к $f_2(z)$, так и от третьего фактора—взаимного расположения областей.

Сектор математики
Академии Наук Арм. ССР
Ереван. 1947, февраль.

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Փակ տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաներին բազմանդամներով մոտավորության մասին

Ներկա հոդվածում քննարկվում է մի խնդիր՝ կոմպլեքս տիրույթում ոչ անալիտիկ եզրագծերի դեպքում լավագույն մոտավորությունների կարգի մասին։

Ապացուցված է, որ այս դեպքում լավագույն մոտավորության կարգը կախված է ինչպես տիրույթի եզրագծից, այնպես էլ ապրոքսիմացիայի ենթարկվող ֆունկցիայի այդ եզրագծի վրա ունեցած հատկություններից։ Գնահատված է նաև բանակապես եզրագծի վատացման ազդեցությունը մոտավորության դանդաղելու վրա։

S. N. Mergelian

On the Degree of Approximation of Analytic Functions by Polynomials in Closed Domains

In the present paper we consider the degree of the best approximation in complex domains in case of non-analytic contours. It's proved:

Theorem 1. For every decreasing function $\varphi(n)$ there exists the Jordan region D so that for every polynomial of order n and for some functioos analytic in D, continuous in $\overline{D}$ and having contour derivatives of the given order

$$\max_{z \in \overline{D}} | f(z) - P_n(z) | > \varphi(n)$$

Let $\sigma(\zeta, r)$ be two-dimensional measure of that part of complement of D which is included in the circle with a radius r and with a center at point ζ.

Theorem 2. Let the Jordan region D have a contour point ζ_0 satisfying the following conditions:

1. There exists a ray derived from point ζ_0 which does not intersect the region D
2. For sufficient small values of r

$$\sigma(\zeta_0, r) < e^{-\psi(r)}$$

where $\psi(r) \to \infty$ monotonously as $r \to 0$;

then

$$\max_{z \in \overline{D}} | f(z) - P_n(z) | > \left[\psi^{-1}(n) \right]^c \text{(c—const.)}$$

for every polynomial of order n, and for some functions having contour derivatives of the given order.

Theorem 3. For every decreasing function $\varphi(n)$ there exists a function $f(z)$, analytic in $|z| < 1$ and continuous in $|z| < 1$ so that

$$\max_{|z| < 1} | f(z) - P_n(z) | > \varphi(n)$$

takes place for every polynomial of order n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* Математ. сбор., 16 (58), № 3, 1945. 2. *W. E. Sewell.* Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942. 3. *А. Л. Шагинян.* Изв. АН СССР, № 4—5, 1941.