ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

VI 1947 3

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

С. А. Амбарцумян

Приближенный метод расчета пологих тонких оболочек

(Представлено А. Г. Назаровым 25 XII 1946)

Для перекрытия зданий с прямоугольным очертанием в плане целесообразно применять пологие, тонкие оболочки ненулевой гауссовой кривизны. При расчете таких оболочек будем исходить из общей теории расчета оболочек А. Лява (1).

1. Пусть срединная поверхность облолочки отнесена к криволинейным ортогональным координатам α и β*, совпадающим с линиями кривизны срединной поверхности. В отношении такой оболочки принимаем следующие упрощающие предпосылки:

а. Пренебрегаем велечиной $\frac{\delta}{R}$ по сравнению с единицей.

б. Считаем, что коэфициенты A и B первой квадратичной формы Гаусса при дифференцировании ведут себя как постоянные.

2. Учитывая исходные предпосылки и считая, что оболочка изгибается только нормально приложенной нагрузкой Z (α,β), получаем следующие уравнения равновесия:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\quad \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}=0,$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=-\frac{1}{AB}\left(B\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+A\frac{\partial N_2}{\partial\beta}\right)-Z, \tag{1.2}$$

$$N_1=\frac{1}{AB}\left(B\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}-A\frac{\partial H}{\partial\beta}\right),\quad N_2=-\frac{1}{AB}\left(B\frac{\partial H}{\partial\alpha}-A\frac{\partial G_2}{\partial\beta}\right).$$

Шестое уравнение опускаем, так как принимаем (2·2).

Входящие в (1.2) усилия и моменты связываются с деформациями следующими формулами:

$$T_1=\frac{E\delta}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\quad G_1=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}(\varkappa_1+\mu\varkappa_2),\quad S_1=-S_2=\frac{E\delta}{2(1+\mu)}\,\omega,$$

$$T_2=\frac{E\delta}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1),\quad G_2=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}(\varkappa_2+\mu\varkappa_1),\quad H_1=-H_2=\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)}\,\tau, \tag{2.2}$$

* Здесь и в дальнейшем придерживаемся обозначений, принятых А. Лявом (1).

где удлинения и изменения кривизны срединной поверхности выражаются через компоненты смещения посредством соотношений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_1}, \qquad \varkappa_1 = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R_2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \tag{3.2}$$

$$\omega = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}, \qquad \tau = \frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Вторая группа соотношений (3.2) впервые получена В. З. Власовым (*).

Учитывая (3.2), из последних двух уравнений равновесия (1.2) получаем:

$$N_1 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\nabla w, \quad N_2 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\nabla w \tag{4.2}$$

Из остальных трех уравнений равновесия при учете (4.2) получим:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2 w - Z,$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \beta^2} = 0. \tag{5.2}$$

3. Для окончательного решения задачи к уравнениям (5.2) следует присоединить уравнение неразрывности:

Из (2.2) и (3.2) имеем:

$$S = \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{A}{E\delta}(T_1 - \mu T_2) + \frac{A}{R_1}w, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{B}{E\delta}(T_2 - \mu T_1) + \frac{B}{R_2}w.$$

Совместно решая (1.3), (1.2) и второе уравнение (5.2), получим необходимое уравнение неразрывности, которое с уравнениями (5.2) составляет систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными T_1, T_2, w.

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2 w = -Z,$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \beta^2} = 0. \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 T_1 + \frac{E\delta}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\nabla_R w = 0.$$

Здесь использованы обозначения:

$$\nabla = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \qquad \nabla_R = \frac{1}{A^2R_2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{B^2R_1}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}. \tag{3.3}$$

4. Следуя Б. Г. Галеркину ([3]), вводим некоторую функцию перемещений φ, которая удовлетворяет последним двум уравнениям (2.3). Через эту функцию искомые неизвестные выражаются по формулам:

$$T_1 = \frac{E\delta}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\nabla_R\varphi, \quad T_2 = \frac{E\delta}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\nabla_R\varphi, \tag{1.4}$$

$$w = -\nabla^2\varphi.$$

Первое из уравнений (2.3) принимает вид:

$$\nabla^4\varphi + \frac{12(1-\mu^2)}{\delta^2}\nabla_R^2\varphi = -\frac{12(1-\mu^2)}{E\delta^3}Z. \tag{2.4}$$

Это и есть основное разрешающее уравнение пологой, тонкой оболочки ненулевой гауссовой кривизны.

Уравнение (2.4) получается так же, если искомыми неизвестными системы (2.3) являются T_1, T_2 и u, или T_1, T_2 и v. При этом усилия T_1 и T_2 через функцию φ выражаются так, как в (1.4), а компоненты смещения u и v выражаются формулами:

$$u = \frac{1}{AB^2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2} - \frac{1}{A^3R_1}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^3} - \frac{\mu}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla_R\varphi, \tag{3.4}$$

$$v = \frac{1}{A^2B}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{2}{R_2}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\partial\beta} - \frac{1}{B^3R_2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^3} - \frac{\mu}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla_R\varphi.$$

Наконец, пользуясь формулами (2.2), (3.2), (4.2), (1.4) и (3.4), легко можно дать формулы для остальных расчетных величин, выражая их посредством функции φ. Эти формулы имеют вид:

$$G_1 = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\mu}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\nabla^2\varphi,$$

$$G_2 = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{\mu}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\nabla^2\varphi,$$

$$H = -\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\nabla^2\varphi,$$

$$S = -\frac{E\delta}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\nabla_R\varphi, \tag{4.4}$$

$$N_1 = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^3\varphi,$$

$$N_2 = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^3\varphi.$$

Таким образом задача о тонкой, пологой оболочке при нормально приложенных нагрузках приводится к разысканию функции перемещений φ, определяемой дифференциальным уравнением восьмого порядка (2.4).

5. Рассмотрим частные случаи. Для круговой цилиндрической оболочки за координаты α, β примем расстояния до изучаемой точки соответственно вдоль образующей и по дуге поперечного круга срединной поверхности. Тогда очевидно $A=B=1$.

Учитывая, что $\frac{1}{R_1}=0, \frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}=\text{Const}$, из (2.4) получим:

$$\nabla^4\varphi+\frac{12(1-\mu^2)}{\delta^2R^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\alpha^4}=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}Z. \qquad 1.5$$

Это—известное разрешающее уравнение круговой цилиндрической оболочки, полученное А. И. Лурье [4] и Т. Т. Хачатряном*.

Для сферической оболочки, очевидно, $R_1=R_2=R=\text{Const}$. Выбирая α и β так, чтобы $A\approx B\approx 1$, получим:

$$\nabla^4\varphi+\frac{12(1-\mu^2)}{\delta^2R^2}\nabla^2\varphi=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2}Z, \qquad 2.5$$

вводя новую функцию $f=\nabla^2\varphi$, получим:

$$\nabla^2 f+\frac{12(1-\mu^2)}{\delta^2R^2}f=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}Z. \qquad 3.5$$

Это—разрешающее уравнепие сферической оболочки при нормально приложенных нагрузках.

Полагая $Z=0$, получим разрешающее уравнение задачи изгиба сферической оболочки сосредоточенными силами:

$$\nabla^2 f+\frac{12(1-\mu^2)}{R^2\delta^2}f=0. \qquad 4.5$$

Это уравнение распадается на две $\nabla f=\pm i\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{R\delta}f$.

Следуя Ю. Н. Работнову [5], полагаем $\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{R\delta}=2k^2$ и, представляя лапласиан в полярных координатах, получаем уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2f'}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df'}{dr}-\left(\frac{1}{r^2}\pm 2ik^2\right)f'=0, \qquad 5.5$$

которое дает общее решение задачи изгиба сферической оболочки сосредоточенными силами.

Из формулы (1.4), (3.4) и (4.4) легко можно получить формулы для расчетных величин указанных частных случаев.

Институт строительных
материалов и сооружений
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1946, декабрь.

* Доложено на 2-ом совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25—28 марта 1946 г. в Институте Механики Академии Наук СССР.

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Բարակ, փոքր կորություն ունեցող թաղանթների հաշվման մի մոտավոր եղանակ

Օգտագործելով թաղանթների հաշվման Ա. Լյավի ընդհանուր տեսությունը և կատարելով a) *ու* б) *պարզեցնող ենթադրությունները, ցույց է տրված, որ բարակ, փոքր կորություն ունեցող թաղանթների հաշվման խնդիրը, նորմալ կիրառված բեռնվածությունների դեպքում, բերվում է տեղափոխությունների* φ *ֆունկցիայի որոնմանը, որը որոշվում է (2.4) ութերորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումով. (1.4), (3.4) և (4.4) բանաձևերով տրված են տեղափոխությունները, ճիգերը և մոմենտները* φ *ֆունկցիայով արտահայտված։*

Որպես մասնակի դեպքեր տրված են՝ գլանային (1.5) և սֆերիկ (3.5), (5.5) թաղանթների հավասարումները, որոնք ոչնչով չեն տարբերվում, այդ դեպքերի համար, այլ ճանապարհներով ստացված հավասարումներից։

S. A. Ambarzumyan

An Approximate Method to Calculate Sloping Thin Shells

Using the A. Love's general theory of elastic shells and admitting simplifications a) and b) it is shown that the problem of sloping thin shells, when the shells loaded normally is drown to a discovery of the function of displacements , being defined by the differential equation (2.4).

By means of formulae (1.4), (3.4) and (4.4) the expressions of displacements, moments and stresses by means of the functions of displacements are given.

As particular cases solving equations are given for the circular cylindrical (1.5) and spherical (3.5), (5.5) shells. The equations (1.5), (3.5) and (5.5) differ in nothing from existing equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ляв.* Математ. теория упругости, 1935. 2. *В. З. Власов.* Прикл. мат. и мех., № 2, 1944 г. 3. *Б. Г. Галеркин.* Прикл. мат. и мех., № 2, 1943. 4. *А. И. Лурье.* Прикл. мат. и мех., № 3, 1946. 5. *Ю. Н. Работнов.* ДАН СССР, 47, № 5, 1945.