ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
V 1946 4

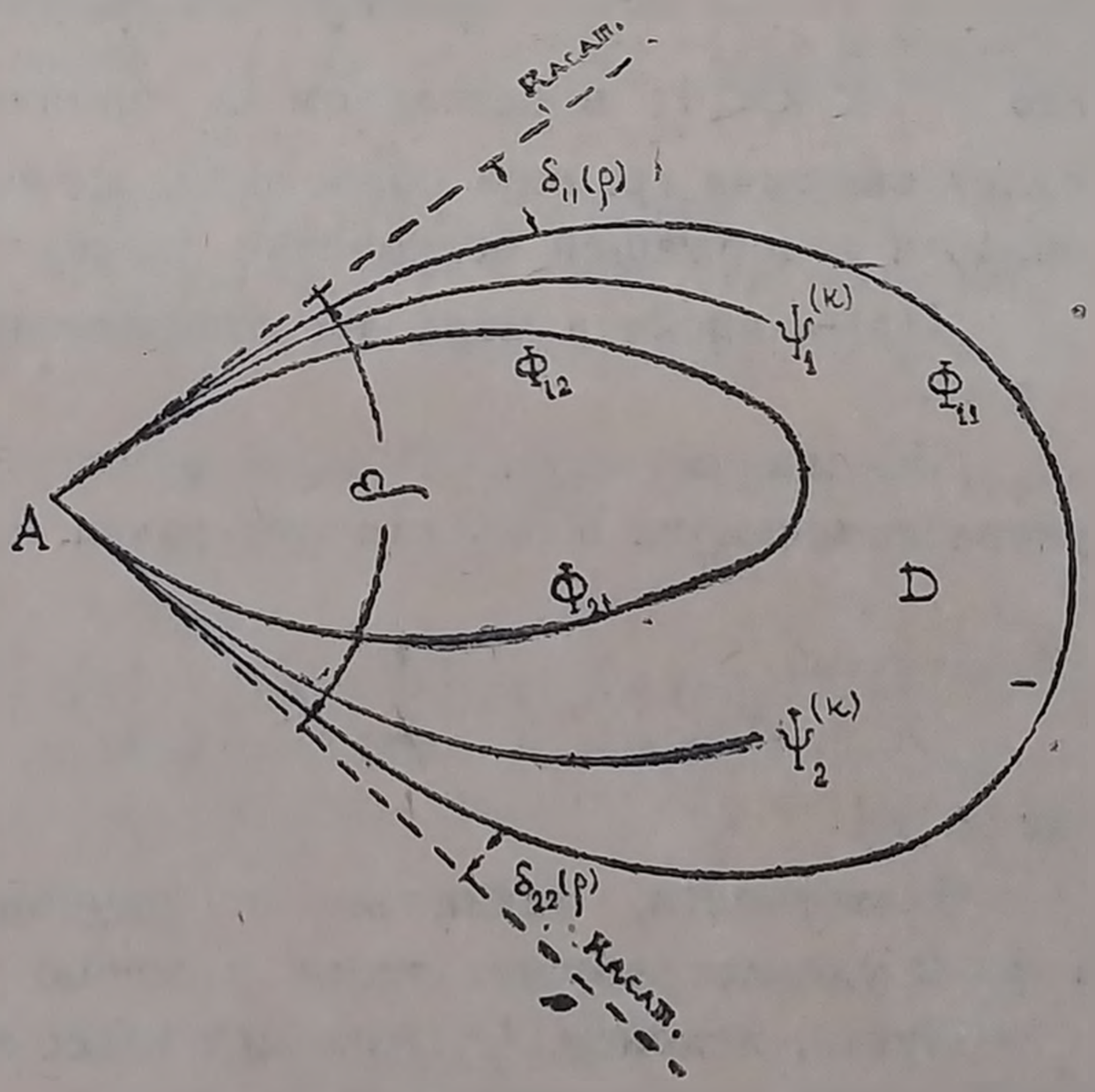
МАТЕМАТИКА

**А. Л. Шагинян, чл.-корресп. АН Арм. ССР**

# Об одном признаке неполноты системы аналитических функций

(Представлено 15 XI 1946)

1. В настоящей заметке мы формулируем одну теорему о неполных системах аналитических функций, позволяющую уточнить некоторые из полученных нами ранее результатов ([1]), а также имеющую самостоятельное значение.




Пусть D (см. черт.)—односвязная область топологически эквивалентная области ограниченной двумя окружностями, имеющими внутреннее соприкасание. Поместим начало полярных координат $(\rho, \varphi)$ в кратной граничной точке A.

Допустим, что граница области в некоторой окрестности $0 < \rho \leqslant a$ состоит из четырех дуг, выражаемых следующими однозначными и абсолютно непрерывными функциями

$$\varphi = \Phi_{11}(\rho), \qquad \varphi = \Phi_{12}(\rho)$$

$$\varphi = \Phi_{21}(\rho), \qquad \varphi = \Phi_{22}(\rho).$$

Допустим, что $\varphi = \Phi_{11}(\rho)$ и $\varphi = \Phi_{12}(\rho)$ и соответственно $\varphi = \Phi_{21}(\rho)$ и $\varphi = \Phi_{22}(\rho)$ имеют общие касательные, которые образуют угол $\beta$.

Введем следующие обозначения: $\tau_{ik}$ угол образуемый полярным радиусом и касательной к кривой $\varphi = \Phi_{ik}(\rho)$

в точке на расстоянии $\rho$ от A;

$$\Theta_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12} \qquad \Psi_1 = \frac{\Phi_{11} + \Phi_{12}}{2}$$

$$\Theta_2 = \Phi_{21} - \Phi_{22} \qquad \Psi_2 = \frac{\Phi_{21} + \Phi_{22}}{2}$$

$\delta_{ik}(\rho)$ расстояние точки кривой $\varphi = \Phi_{ik}(\rho)$, соответствующий аргументу $\rho$, до касательной к этой кривой в точке A:

$$\delta_1(\rho) = \delta_{11}(\rho) + \delta_{22}(\rho)$$

$$\delta_2(\rho) = \delta_{12}(\rho) + \delta_{21}(\rho)$$

$L_k$ замкнутая спрямляемая кривая Жордана внутри D, которая проходит через точку A и охватывает контур, состоящий из дуг $\varphi = \Phi_{12}(\rho)$, $\varphi = \Phi_{21}(\rho)$ и дуги замыкающей их концы.

В окрестности $0 \leqslant \rho \leqslant a$ точки A пусть $L_k$ состоит из дуг:

$$\varphi = \Psi_1^{(k)} = \Psi_1(\rho) + k\Theta_1(\rho)$$

$$\varphi = \Psi_2^{(k)} = \Psi_2(\rho) + k\Theta_2(\rho),$$

где $-1 < k < 1$; в остальном $L_k$ произвольна. В частности, пусть $L_1$ будет внешняя граница области D, являющейся одновременно границей области содержащей бесконечно далекую точку.

$T(\rho)$—линейная мера дуг отсекаемых областью D на окружности $|z| = \rho$.

Обозначим через $D^*$ класс функций $g(z)$ регулярных вутри $L_1$ и удовлетворяющих в окрестности точки A ($\rho = 0$) неравенству

$$|g(z)| < \exp\left[ |z|^{\frac{\pi}{\beta}} \left( \lg \frac{1}{|z|} \right)^{\rho} \right]^{-1},$$

где $\rho > 1$.

В частности, полиномы и рациональные функции с полюсом в $\rho = 0$ удовлетоворяют этому условию.

Пусть, наконец, $D_2$ означает класс функций $f(z)$ регулярных внутри D и удовлетворяющих условию

$$\iint_{(D)} |f(z)|^2 dxdy < \infty$$

Совокупность функций $\{g(z)\}$ принадлежащих классу $D^*$, называем полной в классе $D_2$, если для любой $f(z)$ из $D_2$

$$\inf \iint_{(D)} |f(z) - g(z)|^2 dxdy = 0$$

Теорема *. *Если область* D *удовлетворяет дополнительным условиям*

1) $\int_0^a \frac{\tau_{lk}^2}{\rho^2}\, d\rho < \infty$ $\qquad (l,k=1,2)$

2) $\int_0^a \frac{\tilde{o}_1(\rho)}{\rho^2}\, d\rho < \infty$ ; $\qquad \int_0^a \frac{\tilde{o}_2(\rho)}{\rho^2}\, d\rho < \infty$

3) $\int_0^a \rho^{\frac{\beta}{\pi}-1} \lg T(\rho) d\rho$ *сходится,*

*то никакая система функций класса* D* *не полна в* $D_2$. *Более того, если какая либо последовательность функций из класса* D* *сходится в среднем в* D, *то предельная функция будет регулярна внутри контура* $L_1$.

*Доказывается, что нарушение одного из условий* 1)—3) *может привести к области, где имеет место полнота определенного класса функций.*

Конформным отображением области ограниченной кривой $L_1$ можно получить аналогичные теоремы для других типов областей, например, для бесконечной области топологически эквивалентной полной прямой полосе или полуполосе.

Приведенная теорема, как указывали мы выше, позволяет уточнить некоторые из наших прежних результатов.

Укажем на одно из таких уточнений.

Пусть D произвольная область типа описанного в начале этой заметки, лежащая в области ограниченной двумя соприкасающимися окружностями. Обозначим опять через $\rho$ расстояние точки z до кратной граничной точки A. Нами доказано ([1]), что при

$$T(\rho) < e^{-\frac{c}{\rho}\lg\frac{1}{\rho}} \quad (c\text{—const.})$$

для любой $f(z) \in D_2$ система полиномов удовлетворяет условию

$$\inf \iint_{(D)} |f(z) - P_n(z)|^2 dxdy = 0,$$

а если

$$T(\rho) > e^{-\frac{1}{\rho^{1-\varepsilon}}},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно малое число, то в области D, вообще говоря, не имеет место полнота.

Теорема ( * ) позволяет заменить последнее неравенство более точным

$$T(\rho) > \exp\left\{-\left[\rho^{k}\lg\frac{1}{\rho}\cdot\lg\lg\frac{1}{\rho}\cdots\left(\overbrace{\lg\lg\cdots\lg}^{k}\frac{1}{\rho}\right)^{\rho}\right]^{-1}\right\},$$

где k произвольно большое натуральное число, а $\rho > 1$.

*Замечание 1.* В области D (теорема * ) взвешенно-равномерная аппроксимация функций, регулярных внутри D, непрерывных в замкнутой области D, посредством функций из класса $D^*$ невозможна при весе

$$\exp\left\{-\left[\rho^{\frac{\pi}{\rho}}\lg\frac{1}{\rho}\cdot\lg_2\frac{1}{\rho}\cdots\left(\lg_m\frac{1}{\rho}\right)^{\rho}\right]^{-1}\right\},\ \rho>1.$$

*Замечание 2.* Из теоремы ( * ) следует невозможность приближенного представления посредством полиномов функций, отображающих конформно область D, типа описанного в теореме ( * ) на круг (2).

Сектор математики
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1946, октябрь.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

## Անալիտիկ ֆունկցիաների սիստեմի ոչ լրիվության մի հայտանիշի մասին

*Ներկա հոդվածում բերված է ոչ ժորդանյան տիրույթների մի դասի համար, նրանցում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ոչ լրիվության մի հայտանիշ։*

*Այնուհետև կիրառված է այդ, հեղինակի նախկինում հրատարակված մի քանի արդյունքները նրբացնելու համար [տե՛ս գրականության ցանկ (1)]։*

A. L. Shahinian

## On One Test of Incompletness of the Analytic Functions

The paper deals with one test of incopletness of a certain family of analytic functions in non-Jordan region topologicaly equivalent the region, limited by the two circumferences contacted internally.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* ДАН СССР, **14**, № 2. 1944. **15**, № 2, 1944. **48**, № 1, 1945. ДАН Арм. ССР, 1, № 1—2, 1944, **3**, № 2, 1945. 2. *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* „Приближенные методы высшего анализа". ОНИЗ Ленинград—Москва, стр. 340—343, 1941.