ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
V 1946 3

МАТЕМАТИКА

Г. А. Амбарцумян

Стохастические процессы с двумя параметрами, приводящие в пределе к нормальной корреляции

(Представлено А. Шагиняном 24 X 1946)

Если $p_0(x, y)$ функция распределения вероятностей x, y, соответствующая моменту $t=0$, и существуют пределы:

$$A_1(t, x, y)=\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{м.о.\Delta x_i}{\Delta t_i}; \quad A_2(t, x, y)=\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{м.о.\Delta y_i}{\Delta t_i};$$

$$B_{11}(t, x, y)=\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{м.о.(\Delta x^i)^2}{2\Delta t_i};$$

$$B_{12}(t, x, y)=B_{21}(t, x, y)=\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta x_i \, \Delta y_i}{2\Delta t_i};$$

$$B_{22}(t, x, y)=\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{м.о.(\Delta y_i)^2}{2\Delta t_i};$$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{м.о.(\Delta x_i)^k \, (\Delta y_i)^s}{\Delta t_i}=0, \qquad k+s>2,$$

то существует плотность $p(t, x, y)$ распределения вероятностей, для момента $t>0$, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[A_1(t, x, y).p(t, x, y)]-\frac{\partial}{\partial y}[A_2(t, x, y).p(t, x, y)]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B_{11}(t, x, y).p(t, x, y)]+2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[B_{21}(t, x, y).p(t, x, y)]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B_{22}(t, x, y).p(t, x, y)] \quad (1)$$

и обращающаяся в функцию $p_0(x, y)$ в момент $t=0$.

Рассмотрим стохастический процесс, определенный функциями $A_1(x)=a_1x+c_1$; $A_2(y)=a_2y+c_2$; $B_{11}=d_1>0$; $B_{22}=d_2>0$; $B_{12}=R\sqrt{d_1d_2}$, что равносильно рассмотрению в дискретные моменты t_i случайных переменных x_i, y_i, определяющихся последовательно уравнениями:

$$\Delta x_i = (a_1 x_i + c_1)\Delta t_i + \alpha_i \sqrt{d_1 \Delta t_i}\ ;\ \Delta y_i = (a_2 y_i + c_2)\Delta t_i + \beta_i \sqrt{d_2 \Delta t_i}\ ,$$

где

$$\text{м.о.}\,\alpha_i = \text{м.о.}\,\beta_i = 0;\ \text{м.о.}\,\alpha_i^2 = \text{м.о.}\,\beta_i^2 = 1.$$

$$\text{м.о.}\,\alpha_i\beta_i = 2R;\ \frac{\text{м.о.}\,\alpha_i\beta_i}{\sqrt{\text{м.о.}\,\alpha_i^2\,.\,\text{м.о.}\,\beta_i^2}} = R = 1.$$

Тогда функция распределения вероятностей $p(t, x, y)$, соответствующая этому процессу, будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1 x + c_1)p\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2 y + c_2)p\right] + d_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} +$$

$$+ 2R\sqrt{d_1 d_2}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + d_2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

и начальному условию

$$p_0(x, y) = p(0, x, y),$$

где $p_0(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x, y)\,dx\,dy = 1$$

и некоторым дополнительным условиям, которые будут сформулированы ниже.

Кроме того мы предположим, что $p(t, x, y) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $y \to \pm\infty$, быстрее всякой отрицательной стенени x и y.

Прежде всего полагая

$$p(t, x, y) = W(t)\,.\,u(x, y),$$

получим:

$$W(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ—произвольная постоянная, а функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению эллиптического типа:

$$d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2R\sqrt{d_1 d_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (a_1 x + c_1)\frac{\partial u}{\partial x} - (a_2 y + c_2)\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ (\lambda - a_1 - a_2)u = 0$$

и сформулированным условиям для $p(t, x, y)$ на бесконечности.

Характеристики этого уравнения будут:

$$d_1 y - \left[R\sqrt{d_1 d_2} + i\sqrt{d_1 d_2 (1 - R^2)}\right]x = c_1$$

$$d_1 y - \left[R\sqrt{d_1 d_2} - i\sqrt{d_1 d_2 (1 - R^2)}\right]x = c_2,$$

так что введя новые переменные:

$$\xi = d_1 y - R\sqrt{d_1 d_2}\,x;\quad \eta = -\sqrt{d_1 d_2 (1 - R^2)}\,x$$

или

$$x = -\frac{1}{\sqrt{d_1 d_2 (1-R^2)}}\eta; \quad y = \frac{1}{d_2}\xi - \frac{R}{d_1\sqrt{1-R^2}}\eta,$$

получим уравнение для $u(\xi, \eta)$:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (-a_2\xi + B\eta + C)\frac{\partial u}{\partial \xi} +$$

$$+(-a_1\eta + D)\frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda - a_1 - a_2)u = 0,$$

где

$$A = d_1^2 d_2(1-R^2) > 0; \quad B = -(a_1 - a_2)\frac{R}{\sqrt{1-R^2}};$$

$$C = Rc_1\sqrt{d_1 d_2} - d_1 c_2; \quad D = c_1\sqrt{d_1 d_2 (1-R^2)}.$$

Полагая $a_1 = a_2 = a$ и

$$V(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{4aA}[(-a\xi + C)^2 + (-a\eta + D)^2]} \cdot u(\xi, \eta),$$

для $V(\xi, \eta)$ получится уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \left[\frac{\lambda - a}{A} - \frac{(-a\xi + C)^2 + (-a\eta + D)^2}{4A^2}\right]V = 0$$

При $\lambda = -a(n+m)$, где $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ это уравнение имеет решение

$$V_{n,m}(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{4aA}[(-a\xi + C)^2 + (-a\eta + D)^2]} H_n\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\xi - \frac{C}{a}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot H_m\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\eta - \frac{D}{a}\right)\right],$$

где H_n и H_m — соответствующие нормированные полиномы Эрмита.

Следовательно

$$U_{n,m}(\xi, \eta) = C_{nm}\, e^{\frac{1}{2aA}[(-a\xi + C)^2 + (-a\eta + D)^2]} H_n\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\xi - \frac{C}{a}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot H_m\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\eta - \frac{D}{a}\right)\right],$$

где $a < 0$ для выполнения условий при $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$.

Таким образом

$$p(t, x, y) = e^{\frac{1}{2aA}[(-a\xi + C)^2 + (-a\eta + D)^2]} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}\, e^{a(n+m)t} H_n\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\xi - \frac{C}{a}\right)\right] \cdot H_m\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\eta - \frac{D}{a}\right)\right].$$

Если функция

$$P_0(x, y) = P_0(\xi_1, \eta_1),$$

где $\xi_1 = \sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\xi - \frac{C}{a}\right)$, $\eta_1 = \sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\eta - \frac{D}{a}\right)$ такова, что имеет место разложение функции

$$P_0(\xi_1, \eta_1)\, e^{\frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2)}$$

по функциям:

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2)} H_n(\xi_1) \cdot H_m(\eta_1):$$

$$P_0(\xi_1, \eta_1) \cdot e^{\frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} H_n(\xi_1) \cdot H_m(\eta_1)\, e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2)}, \quad (*)$$

где

$$A_{nm} = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_0(\xi_1, \eta_1) H_n(\xi_1) \cdot H_m(\eta_1)\, d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \frac{-a}{2A(n!)^2 2^{2n}\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_0(\xi, \eta) H_n\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\xi - \frac{C}{a}\right)\right] \cdot$$

$$H_m\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(\eta - \frac{D}{a}\right)\right] d\xi d\eta,$$

то

$$C_{nm} = A_{nm}$$

и

$$p(t, x, y) = e^{-\frac{1}{2aA}[(-a\xi+C)^2+(-a\eta+D)^2]} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\, e^{(n+m)at} H_n\left[\sqrt{-\frac{1}{2aA}}(-a\xi+C)\right] \cdot H_m\left[\sqrt{-\frac{1}{2aA}}\ -a\eta+D\right]$$

или

$$p(t, x, y) =$$

$$= e^{\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{a}{d_1}\left(x+\frac{c_1}{a}\right)^2 + \frac{a}{d_2}\left(y+\frac{c_2}{a}\right)^2 - \frac{2aR}{\sqrt{d_1 d_2}}\left(x+\frac{c_1}{a}\right)\left(y+\frac{c_2}{a}\right)\right]} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\, e^{a(n+m)t} H_n\left[\sqrt{\frac{-a}{2A}}\left(R\sqrt{d_1 d_2}\left(x+\frac{c_1}{a}\right) - d_1\left(y+\frac{c_2}{a}\right)\right)\right] \cdot$$

$$\cdot H_m\left[\sqrt{\frac{-a}{2d_1}}\left(x+\frac{c_1}{a}\right)\right]$$

Ряд этот сходится абсолютно и равномерно относительно x, y, t, если равномерно сходится ряд (*). Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим поверхность распределения вероятностей при нормальной корреляции

$$\lim_{t\to\infty} p(t, x, y) = P(x, y) =$$

$$= A_{00}\, e^{\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{a}{d_1}\left(x+\frac{c_1}{a}\right)^2+\frac{a}{d_2}\left(y+\frac{c_2}{a}\right)^2-\frac{2aR}{\sqrt{d_1d_2}}\left(x+\frac{c_1}{a}\right)\left(y+\frac{c_2}{a}\right)\right]},$$

где

$$A_{00} = \frac{-a}{2\pi\sqrt{d_1 d_2(1-R^2)}}.$$

При любом значении $t>0$ получаются следующие значения для математических ожиданий:

$$M_1(t) = м.о.x = -\frac{c_1}{a} + \left(M_1^0 + \frac{c_1}{a}\right) e^{at};$$

$$N_1(t) = м.о.y = -\frac{c_2}{a} + \left(N_1^0 + \frac{c_2}{a}\right) e^{at}.$$

$$M_2(t) = м.о.x^2 = \frac{{}_1^2\,c - ad_1}{a_2} - \frac{2c_1(M_1^0 a + c_1)}{a^2} e^{at} +$$

$$+\left[M_2^0 + \frac{ad_1 - c_1^2}{a_2} + \frac{2c.(M_1^0 a + c_1)}{a_2}\right] e^{2at};$$

$$N_2(t) = м.о.y^2 = \frac{c_2^2 - ad_2}{a^2} - \frac{2c_2(N_1^0 a + c_2)}{a_2} e^{at} +$$

$$+\left[N_2^0 + \frac{ad_2 - c_2^2}{a_2} + \frac{2c_2(N_1^0 a + c_2)}{a_2}\right] e^{2at},$$

где M_1^0, M_2^0, N_1^0, N_2^0 являются м.о.x, м.о.x^2, м.о.y, м.о.y^3 при $t=0$.

$$B_1(t) = м.о.x^2 - (м.о.x)^2 = -\frac{d_1}{a} + \left(M_2^0 - M_1^{02} + \frac{d_1}{a}\right) e^{2at}$$

$$B_2(t) = м.о.y^2 - (м.о.y)^2 = -\frac{d_2}{a} + \left(N_2^0 - N_1^{02} + \frac{d_2}{a}\right) e^{2at}$$

$$L_{11}(t) = м.о.xy = \left(L_{11}^0 + \frac{c_1N_1^0 + c_2M_1^0}{a} + \frac{c_1c_2}{a^2} + \frac{R\sqrt{d_1d_2}}{a}\right) e^{2at} -$$

$$-\left(\frac{c_1N_1^0 + c_2M_1^0}{a} + \frac{2c_1c_2}{a^2}\right) e^{at} - \left(\frac{R\sqrt{d_1d_2}}{a} - \frac{c_1c_2}{a^2}\right)$$

$$B_3(t) = м.о.xy - м.о.x.м.о.y =$$

$$= \left(L_{11}^0 - M_1^0N_1^0 + \frac{R\sqrt{d_1d_2}}{a}\right) e^{2at} - \frac{R\sqrt{d_1d_2}}{a}$$

$$R(t) = \frac{м.о.xy - м.о.x.м.о.y}{\sqrt{B_1(t)\cdot B_2(t)}} =$$

$$= \frac{\left(L_{11}^0 a - M_1^0N_1^0 a + R\sqrt{d_1d_2}\right) e^{2at} - R\sqrt{d_1d_2}}{\sqrt{\left[\left(N_2^0 a - N_1^{02} a + d_2\right) e^{2at} - d_2\right]\left[\left(M_2^0 a - M_1^{02} a + d_1\right) e^{2at} - d_1\right]}}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{t\to\infty} M_1(t) = -\frac{c_1}{a}; \qquad \lim_{t\to\infty} N_1(t) = -\frac{c_2}{a}$$

$$\lim_{t\to\infty} B_1(t) = -\frac{d_1}{a}; \qquad \lim_{t\to\infty} B_2(t) = -\frac{d_2}{a}; \qquad \lim_{t\to\infty} R(t) = R$$

Ереванский Государственный
Университет им. В. М. Молотова
Ереван, 1946, сентябрь.

Գ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Երկու պարամետրերով ստոխաստիկ պրոցեսներ, որոնք սահմանում հանգում են նորմալ կորելյացիայի

Եթե դիտարկենք մի ստոխաստիկ պրոցես, որը բնորոշվում է ֆունկցիաներով՝

$$A_1(x) = ax + c_1; \; A_2(y) = ay + c_2; \; B_{11} = d_1 > 0; \; B_{22} = d_2 > 0; \; B_{12} = R\sqrt{d_1 d_2},$$

ապա որոշվում է համապատասխան $P(t, x, y)$ *հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան ամեն մի* $t > 0$ *համար, եթե* $p(0, x, y)$ *ֆունկցիան տրված է։*

Եթե t-ն ձգտում է անսահմանության, գոյություն ունի սահմանը $\lim_{t\to\infty} p(t, x, y)$, *որը ներկայացնում է նորմալ կորելյացիայի համապատասխանող հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան։*

G. A. Ambarzumian

Stochastic Processes with Two Parameters Giving in Infinity the Normal Correlation

The stochastic processes with two parameters are considered in the case when the functions defining these processes are as follows:

$$A_1(x) = ax + c_1; \; A_2(y) = ay + c_2; \; B_{11} = d_1 > 0; \; B_{22} = d_2 > 0; \; B_{12} = R\sqrt{d_1 d_2}.$$

The probability distribution function $p(t, x, y)$ for $t > 0$ is determined when the initial distribution $p(0, x, y)$ is given. For $t \to \infty$ there exists a limit of $p(t, x, y)$ representing the equation of the normal correlation surface. The values of the moments of the first two orders are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Н. Колмогоров.* Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи математических наук. Вып. V, 1938.