ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ ԵՒ ԳՐԱՀԱՇՈՒԻ

ՀԱՅԵՐԷՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԱԾ ԱՌԱՋԻՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹԻՒՆԸ

Հետեւեալը բանախօսութիւնն է զոր կատարած է Միացեալ Նահանգներու Արիզոնի համալսարանին թուագիտութեան ուսուցիչը՝ Պրն. Արմենակ Շաղոյեան «Ամերիկեան գիտական յառաջադիմութիւն» կաճառին մէջ ի Լըպպաք, Թեքսաս, 1934ի Մայիսի 11ին անգլիերէն լեզուով: Այդ շահեկան բանախօսութեան հայերէն թարգմանութիւնն հրատարակելու ատեն՝ յարգելի հեղինակին կը յայտնենք մեր սրտագին շնորհաւորութիւնները թէ այս և թէ ուսուցչական ասպարէզին մէջ ունեցած իր փայլուն յաջողութեանց՝ որոնց համար արժանացաւ մեծ գնահատանքի և ըստ այնմ բարձրացման:

Եթէ տեղն և պարագան ներէր՝ պիտի ուզէինք մանրամասն տեղեկացնել մեր ընթերցողներուն՝ անոր կատարած թանկագին հետազօտութիւնները հայ թուագիտութեան և չափագիտութեան մասին հայ ձեռագիրներու վրայէն՝ սկսեալ Անանիա Շիրակացիէն մինչեւ վերջին շրջանները:

Այս տեսակէտով յարգելի Ուսուցչապետը տեղեկատուութիւններ մ'ալ ըրած էր երկու տարի առաջ «Մշակ»ի մէջ (Ֆրէզնօ):

ԽՄԲ.

Այս գիրքը Վիեննայի հռչակաւոր Մխիթարեան Միաբանութենէն Հ. Ղուկաս Տէրտէրեանցի արժէքաւոր մէկ գործին Ա. հատորն է: Ամբողջ գործը – Գրահաշիւ, Երկրաչափութիւն և Եռանկիւնաչափութիւն – երեք հատորի մէջ, 930 էջերով, հրատարակուած է Վիեննա 1843ին և կը կրէ «Խոնարհագոյն Ուսողութիւն» անունը: Հակառակ այդ անունին՝ նիւթերուն կարեւոր մէկ մասը միջին և բարձրագոյն ուսողութեան կը պատկանի, մասնաւորապէս կան քանի մը մասեր ալ, որոնք իրենց ունեցած սովորականէն տարբեր հանգամանքով, կ'արժեն որ մեր արդի թուաբանական դասագրքերուն մէջ դրուին: Լեզուն գրաբար է և նշանագրերը Հայերէն են փոխանակ Լատիներէնի: Հայ աշակերտներ ու սերունդներ անով կրթուած են Վիեննայի, Տաճկաստանի, Հայաստանի և Ռուսիոյ մէջ:

Յառաջաբանին մէջ հեղինակը կ'ըսէ «Ասիկա Հայերէնի մէջ առաջին գիրքն է և նկատելով որ թուաբանութեան ուսուցիչներ շատ քիչ են մեր մէջ, մենք պէտք տեսած ենք, մանրամասնօրէն ներկայացնել կանոններն ու բացատրութիւնները ի նպաստ անոնց՝ որոնք կը փափաքին օգտուիլ այս գրքէն առանց ուսուցչի. Թէպէտ պէտք է խոստովանիմ որ շատ դժուարին աշխատութիւն մը պիտի ըլլայ առանց դաստիարակի նպատակին հասնիլ»: Հեղինակը այնուհետեւ կը զգուշացնէ ընթերցողը՝ զանց չընել ո՛ և է մաս, վասն զի թուաբանական բոլոր օրէնքները, այնպիսի կապակցութիւն մը ունին իրարու հետ որ պէտք է անոնց տիրանալ՝ կարգով, եթէ ոչ անկարելի կ'ըլլայ յառաջդիմութիւնը:

Ա. և Գ. հատորներուն վերջը, հեղինակը համառօտ բառգրքոյկ մը դրած է, ուր, թուագիտական Հայերէն բառերուն դիմացը գաղղ. և գերմաներէն անունները կան, որպէս զի ընթերցողը այդ երկու լեզուներու գիտական բառերուն միանգամայն

տեղեակ ըլլայ: Այս պարագան շատ գովելի է, վասն զի նորահաս աշակերտութիւնը յաճախ դժուարութեան կը մատնուի անոնց չգոյութենէն և շատ փափաքելի է որ մաթեմաթիքի աշակերտները շուտով հմտանան այդ բառերուն:

Այս գրքին շահեկան ուրիշ մէկ կէտն ալ սա է որ՝ յառաջաբանէն անմիջապէս ետքը, հեղինակը ճշգրիտ և խնամեալ կերպով թուագիտութեան կարեւոր մասերուն պատմականը կ'ընէ, եգիպտական շրջանէն սկսեալ մինչեւ ԺԸ դար, այնպէս որ ընթերցողը դիւրաւ կրնայ հասկնալ այդ գիտութեան ծնունդն և զարգացումը:

Առաջին հատորը երկու մասերու բաժնուած է. Առաջին մասը ամբողջութեամբ թուաբանութեան կը վերաբերի և կը խօսի մեր հասարակ թիւերու դրութեան և հիմնական չորս գործողութեան վրայ և այլն. 32րդ էջին մէջ շահեկան և կարեւոր ցանկ մը կայ չափերու, ծանրութեան, երկայնութեան, ժամանակի և դրամներու մասին – շատ օգտակար անոնց համար որոնք կը շահագրգռուին Անանիա Շիրակացիի՝ նոյն նիւթերու մասին գրածներէն. ժամանակի ցանկին մէջ հեղինակը կը յիշէ և կը գործածէ «երրորդներ» բառը իր խնդիրներուն մէջ. (60 երրորդները մէկ երկվայրկեան կ'ընեն): Չափագիտութեան պատմութեան հետեւող աշակերտը պէտք է յիշէ այն մեծ կարեւորութիւնը որ յոյները կու տային sexagesimal կոտորակներուն իրենց աստղաբաշխական հաշիւներուն մէջ (նախապէս Բաբելոնական) և մենք կը տեսնենք առհասարակ անոնց գործածութիւնը Պտղոմէոսի և անոր յաջորդող հեղինակներու աշխատութեանց մէջ:

Գրքին Բ. մասն է (37–450) տարրական և միջին գրահաշիւը, բայց թուաբանութիւնը չէ լքուած: Գրահաշուի զանազան մասերը ընդարձակօրէն բացատրուած ատեն Հ. Ղուկաս կը ներմուծէ թուաբանական հարցեր և կը պարզէ զանոնք ինչպէս են՝ թիւերու բաժանելիութիւնը, մեծագոյն հասարակաց բաժանարարը, փոքրագոյն հասարակաց բազմապատիկը, հասարակ և տասնորդական կոտորակները, հանդերձ տասնորդականի վերածելու դրութեամբ, արմատները և կարողութիւնները, բան և համեմատութիւն, նշանակ (logarithms) և այլն: Հեղինակը երբ գրահաշուի վրայ երկարօրէն կը խօսի, զգացնել կու տայ ընթերցողին թէ ան՝ թուաբանութեան օժանդակ մէկ մասն է: Անտարակոյս այս պարագան շատ գովելի է և պէտք է ուշադրութեան առարկայ ըլլայ ան մեր կրթական ուսուցիչներուն, որոնք յաճախ կը դատապարտեն և չեն քաջալերեր գրահաշուի ուսուցումը մեր երկրորդական վարժարաններուն մէջ իբր վերացական գիտութիւն մը: Հ. Ղուկաս այս գաղափարին հիմնովին հակառակը հաստատած է.

Հեղինակին զուտ գրահաշուի վերաբերեալ հարցերը նկատի առնելէ առաջ, իր թուաբանութեան մէկ կամ երկու կարեւոր կէտերուն վրայ կ'ուզենք ծանրանալ: Անոնցմէ մին է թիւերու բաժանելիութեան կանոններուն մասին իր մանրամասն ու խնամեալ ուսումնասիրութիւնը: Այս պարագան շեշտել կ'ուզեմ վասն զի մեր թուաբանական գրքերուն մէջ այս կէտը անտեսուած է ցաւալիօրէն և այս պատճառով միջնակարգ ուսանողին անկարողութիւնը՝ ամբողջական կամ կոտորակ թիւերու գործածութեան նկատմամբ՝ պարզապէս ողբալի է. և հիմա ժամանակն է որ մեր թուաբանութեան ուսուցիչները իրենց ուշադրութեան առարկայ դարձնեն այս խիստ կենսական հարցը: Որ և է աշակերտ կամ ուսուցիչ գիտէ որ մեր արդի դասագրքերը միայն 2, 5 10 թիւերուն բաժանելիութեան կանոնները կու տան: Անոնք անայլայլ կերպով զանց կ'ընեն թուի մը բաժանելիութիւնը 3ով, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. որոնց ուսուցումը նոյնքան դիւրին է որքան ալ կարեւոր: Արդ, այս ամէնը Հ. Ղուկաս ոչ թէ միայն բացատրած և լուսաբանած է, այլ ձեռնհասօրէն այս կանոններու փորձերն ևս տուած է: Հետեւեալները բաժանականութեան կանոններու համառօտութիւնն են.

Թիւ մը բաժանելի է՝

2 ով՝ եթէ վերջին թիւը զոյգ է կամ 0.
3 ով՝ եթէ միութիւններու գումարը նոյն թուով բաժանելի է.
4 ով՝ եթէ թիւերուն վերջի երկուքին գումարը նոյն թիւով բաժանելի է.
5 ով՝ եթէ վերջին թիւը 5 կամ 0 է.
6 ով՝ եթէ ան բաժանելի է 2 ով ինչպէս նաեւ 3 ով.
7 ով՝ պարզ կանոն չունի. (տե՛ս ստորեւ).
8 ով՝ եթէ վերջին երեք թիւերուն գումարը նոյն թիւով բաժանելի է.
9 ով՝ եթէ թիւերուն ամբողջական գումարը նոյն թիւով բաժանելի է.
10 ով՝ եթէ վերջացող թիւը 0 է.
11 ով՝ եթէ աջէն սկսեալ փոխ – յաջորդ (alternate) թիւերուն գումարներու միջեւ տարբերութիւնն ըլլայ 0 կամ 11 ի մէկ բազմապատիկը.
12 ով՝ եթէ բաժանելի է 4 ով ինչպէս նաեւ 3 ով.
13 պարզ կանոն չունի. (տե՛ս ստորեւ).

7 ով և 13 ով բաժանականութեան կանոնը (ինչպէս նաեւ 11 ով բաժանելիութեան յաւելուածական կանոնը) հետեւեալն է.

Ըլլայ N 10ի շարքին մէջ ո՛ և է թիւ մը, և կ'ունենանք

$$N = (a + 10b + 100c) + (1000d + 10000e + 100000f + 1000000g + 10000000h + 100000000i) \cdots$$

ասոնց մէջ a, b, c իւրաքանչիւրը 10էն պակաս են: Համարենք որ դնենք α գիրը առաջին փակագծին մէջ եղող թուաշարքին տեղ, 10000β երկրորդ փակագծին թուաշարքին տեղ, $1000^2\gamma$ երրորդին տեղ եւն., այսպէս կ'ունենանք.

$$N \div 7 = (\alpha + 1001\beta - \beta + 1000000\gamma + 1000000001\delta - \delta + \text{և այլն}) \div 7$$

$$= \frac{\alpha}{7} + 143\beta - \frac{\beta}{7} + 142857\gamma + \frac{\gamma}{7} + 142857143\delta - \frac{\delta}{7} +$$

$$+ 142857142857\varepsilon + \text{և այլն.}$$

$$= M(7) + \frac{1}{7}(\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \text{և այլն.}$$

ուր M (7) 7ի բազմապատիկի մը տեղ է:

Ուրեմն, եթէ վերջին փակագծի մէջի թուաշարքը բաժանելի է 7 ով, N ալ նոյնպէս բաժանելի է:

Հոս հեղինակը 11 ով և 13 ով բաժանելիներու մնացած փորձը աշակերտին կը թողու վարժութեան համար: Մենք սակայն պիտի ամբողջացնենք այդ փորձը, քանի մը լուսաբանող օրինակներով որոնց երկուքը Հ. Ղուկասի գրքէն առնուած են.

$$N \div 11 = (\alpha + 1001\beta - \beta + 1000000\gamma + 100000000\delta - \delta + \text{և այլն}) \div 11$$

$$= \frac{\alpha}{11} + 91\beta - \frac{\beta}{11} + 90909\gamma + \frac{\gamma}{11} + 90909091\delta - \frac{\delta}{11} + \text{և այլն.}$$

$$= M(11) + \frac{1}{11}(\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \text{և այլն.}$$

Ուրեմն եթէ վերջի փակագծին մէջի շարքը բաժանելի է 11 ով, N նոյնպէս բաժանելի է:

Դարձեալ.

$$N \div 13 = (\alpha + 1001\beta - \beta + 1000000\gamma + 1000000001\delta - \delta + \text{և այլն}) \div 13$$

$$= \frac{\alpha}{13} + 77\beta - \frac{\beta}{13} + 76923\gamma + \frac{\gamma}{13} + 76923077\delta - \frac{\delta}{13} + \text{և այլն.}$$

$$= M(13) + \frac{1}{13}(\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \text{և այլն}).$$

Ուրեմն եթէ վերջի փակագծին մէջի թուաշարքը բաժանելի է 13 ով, N նոյնպէս բաժանելի է:

Ուրեմն կ'ունենանք հետեւեալ կանոնը.

Բաժնէ N. թիւերը աջէն սկսեալ (α, β, γ, ինչպէս վերը տեսանք երեքական խումբերու. շարէ՛ այս խումբերը աջէն սկսեալ ինչպէս թիւերը շարուեցան 11 ով բաժանելիութեան համար, գումարէ՛ յաջորդ թիւերը և հանէ մնացած խումբերը. N բաժանելի է 7 ով 11 ով կամ 13 ով, եթէ մնացած թիւը, բաժանելի է այս եղանակով:- Զոր օրինակ.

$$N = 847{,}963{,}207.$$

Ուրեմն կ'ունենանք $207 - 963 + 847 = 91$:

Քանի որ 91 բաժանելի է 7 ով և 13 ով, բայց ոչ 11 ով, հետեւաբար N բաժանելի է 7 ով և 13 ով և ոչ 11 ով:

Ձախ կողմի վերջին խումբը կրնայ անշուշտ 3էն պակաս թիւ ունենալ: Զոր օրինակ.

N = 3,649,580,932,649,512,036,751,647	905	
36	751	
649	512	
580	932	
3	649	
1915	3749	գումար անզոյգ կարգի խմբ.
	1915	» զոյգ » »
	1834 ÷ 7 = 262	

Քանի որ 1834 բաժանելի է 7 ով, ուրեմն N ալ նոյնպէս բաժանելի է:

Դարձեալ.

N = 1,695,428,100,923	674	
428	100	
1	695	
1352	1469	գումար անզոյգ կարգի խումբերու
	1352	» զոյգ » »
	117 ÷ 13 = 9	

Քանի որ 117 բաժանելի է 13 ով բայց ոչ 7 ով և 11 ով, ուրեմն N բաժանելի է 13 ով բայց ոչ 7 ով կամ 11 ով:

Պէտք է հասկցուի սա կէտը թէ փոխ-յաջորդ շարքերուն գումարը գրահաշուական է. այդ գումարին տարբերութիւնը երբեմն կրնայ բացասական ըլլալ, օր. 2,684,623,571,273 թուաշարքը եթէ վերոյիշեալ կանոնով լուծուի արդիւնքը կ'ըլլայ $-357 \div 7 = -51$ *ուրեմն այս թիւը բաժանելի է 7 ով:*

Այս խնդրին փորձը տարբեր և աւելի գեղեցիկ ձեւով կրնայ ներկայացուիլ.

Թող $N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + 10^8i + \cdots$

Քանի որ $\equiv a \pmod{1001}$, $10 \equiv 10$, $10^2 \equiv 10^2$, $10^3 \equiv -1$, $10^4 \equiv -10$,

$10^6 \equiv -10^3 \equiv -(-1) \equiv 1$, $10^7 \equiv 10$, $10^8 \equiv 10^2$, *և այլն.*

$\therefore N \equiv (a + 10b + 10^2c) - (d + 10e + 10^2f) + (g + 10h + 10^2i) -$ *և այլն. և խնդիրը կ'եզրականայ:*

Գրքին մնացեալ թուաբանական գլուխները, նոյնքան շահեկան են: Հեղինակը իր սովորական և յստակ ոճով լաւ բացատրած և լուսաբանած է զանոնք. մանաւորաբար՝ Բաղադրեալ համեմատութեան և համեմատական բաժանման մասերը խիստ լաւ կերպով տրուած և պարզուած են զանազան ձեւերով և լուծուած են բազմաթիւ օրինակներով:

Գրահաշուի տեղիքներն են գլխաւորաբար չորս հիմնական գործողութիւնները, կոտորակները, շարունակեալ կոտորակներ (զորս հեղինակը յեռեալ կ'անուանէ = continued), *կարողութիւնները և արմատները որոնք լիովին բացատրուած են (էջ* 164-242), *բան և համեմատութիւն, մէջն ըլլալով բաղադրեալ համեմատութիւն և համեմատական բաժանում և նշանակներ*[1], *համադէպ հաւասարութիւնները երկու կամ աւելի անծանօթներով,* n *հաւասարութիւնները* n *անծանօթով լուծելու տեսական բացատրութիւնները (էջ* 372-3). *քառակուսի հաւասարութիւնները, առաւելագոյն աստիճանի պարզ հաւասարութիւնները, այսինքն* $x^n = a$ *զոյգ կամ անզոյգ* n *ի համար: Նոյնպէս հաւասարութիւններ այս ձեւով* $x^{2n} + ax^n + b = 0$, *անորոշ հաւասարութիւնները, թուաբանական և երկրաչափական յառաջատուութիւններ և բազմանկիւն թիւեր:*

Հ. Ղուկասի գրահաշուին մասին գաղափար մը տալու համար, հոս պիտի ներկայացնենք, ընթերցողին իր բազմանկիւն թիւերը արդի նշանագիրներով, և քանի մը յաւելուածական ծանօթութիւններով: Այս նիւթն ընտրեցի անոր գրահաշուէն ոչ թէ որովհետեւ շատ օգտակար այլ որովհետեւ շատ անտեսուած տեղիք մ'է մեր դպրոցական գրահաշուի գասագրքերէն: Այս հարցը՝ արդի դասագրքերէն դուրս ձգուած է, որովհետեւ ան նկատուած է հինօրեայ և կամ զուրկ գործնական արժէքէ: Եւ ասիկա դժբախտութիւն մ'է: Թուագիտական պատմութեան աշակերտները պիտի յիշեն թէ, այդ բազմանկիւն թիւերը, Պիւթագորասի ուշադրութիւնը գրաւած էին, ինչպէս նաեւ նախկին յոյն թուագէտներէն շատերունը՝ մինչեւ Բասքալի ժամանակները: Այս թիւերը արդի թուաբանական լուծումներու մէջ իրենց կիրառութիւնները ունին, օրինակի համար, Ճ. Հ. Մաքտօնալտ «Թերատական գլաններուն տարբերական հաւասարութիւնները» շատ կարեւոր յուշագիրը (The differential equations of the Elliptic Cylinder) *հատ.* 29 (1927) *էջ* 651, *ուր հեղինակը կ'ըսէ «... կարելի*

1. *Գիրքը նշանակներու տախտակներ* (logarithms) *չունի: Հեղինակը եօթը տարբեր ցանկերու միջոցով ճիշդ արդիւնքներ ձեռք բերած է. 304-5 էջերուն մէջ տրուած է համառօտ բայց հետաքրքրական տեղեկութիւն մը նշանակներու պատմութեան և նշանակներու տախտակներու գործածութեան՝ իր և իրմէ նախորդ շրջանին:*

է դիտել թէ D_n *ի մէջ՝ տուեալ կարգի մը միութիւններուն թիւը առերեւոյթ է: Եթէ* $f_{n,r}$ *կը նշանակէ* r *երորդ կարգին* n *երորդ առերեւոյթ թիւը՝ այն ատեն* D^n*ի* 2p *կարգին թիւը կ'ըլլայ՝* $f_{rn} + 1 - 2p,\ p + 1$».

$$\text{Ուր } D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2 & 1 & x_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & x_n & 1 \end{vmatrix}."$$

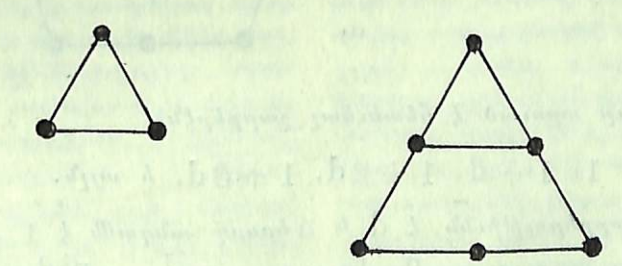
Հիմա վերոյիշեալ կարեւոր աշխատութեան բառերը կատարելապէս անհասկանալի պիտի ըլլային՝ եթէ ընթերցողը չէ ուսած իր բարձրագոյն գրահաշուին մէջ բազմանկիւն և առերեւոյթ թիւերը:

Հետեւեալը բազմանկիւն (առերեւոյթ = figurate *ըստ Հ. Ղուկասի) թիւերուն գործողութիւնն է: Բազմանկիւն թիւերը կարգ մը այնպիսի թիւեր են որ եթէ իւրաքանչիւր թիւին տեղ նոյնքան թուով համաչափ շարուած կէտեր դնենք կանոնաւոր բազմանկիւն մը կը գոյանայ, ինչպէս հաւասարակող եռանկիւն մը, քառակուսի մը, կանոնաւոր հնգանկիւն մը և այլ ըստ կարգին:*

Եթէ բնական թիւերուն շարքէն 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..., n, *ուր՝ հասարակ տարբերութիւնը* d *միութիւնն է, կ'ունենանք ուրիշ կարգեր ալ, առնելով առաջին միաւորը և յաջորդական գումարները առաջին երկու, առաջին երեք, առաջին չորս թիւերուն, կ'ունենանք* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 *թիւերը, որոնք կը կոչուին եռանկիւնային թիւեր, որուն մէջ* n *երորդ անդամը գումարն է բնական թիւերուն առաջին* n *եզրերուն և հաւասար է* $\frac{n(n+1)}{2}$*ի: Զոր օրինակ, 7 երորդ եռանկիւնային թիւն է* $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$:

Ստուգելու համար թէ թիւ մը եռանկիւնային է թէ ոչ, պէտք է դնենք $\frac{n(n+1)}{2} = A$, *հետեւաբար* $n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8A}}{2}$. *Եռանկիւնային թիւի մը համար, վերջին հաւասարութիւնը պէտք է տայ դրական* (positive) *ամբողջութիւն մը: Օրինակի համար, թող ըլլայ* $A = 703$*ի, ուրեմն վերոյիշեալ* $n = 37$, *ուսկից կրնանք գիտնալ թէ 703ը եռանկիւնային 37 երորդ թիւն է: Բայց եթէ* n *երեւակայական* (irrational) *թիւ է կամ կոտորակ մը, այն ատեն յայտնապէս A եռանկիւնային թիւ մը չէ:*

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ԵՌԱՆԿԻՒՆԱՅԻՆ ԹԻՒԵՐՈՒ

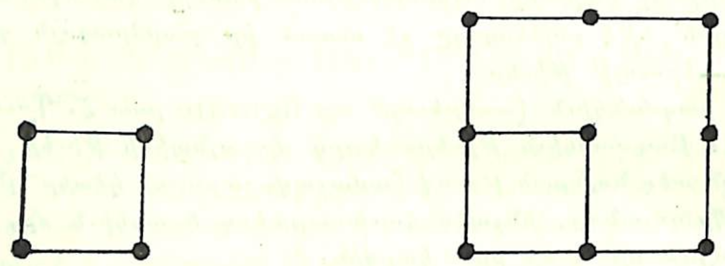


Եթէ առնենք թուաբանական շարքը, 1, 3, 5, 7, 9, 11..., *ուր* $d = 2$, *և իւրաքանչիւր անդամ* $= 2n - 1$, *և ինչպէս և առաջ, կը կազմենք ուրիշ կար-*

գեր ալ, առնելով առաջին միաւորը և առաջին երկու, առաջին երեք, առաջին չորս... յաջորդական գումարներուն եզրները՝ կ'ունենանք 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 81..., կարգերը որ կը կոչուին քառակուսի թիւեր, ուր n երորդ անդամը առաջին n անզոյգներուն գումարն է և հաւասար է $\frac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$:

Ասկէ կը հետեւի թէ առաջին անզոյգ թիւերու գումարը 1էն սկսեալ՝ է n^2:

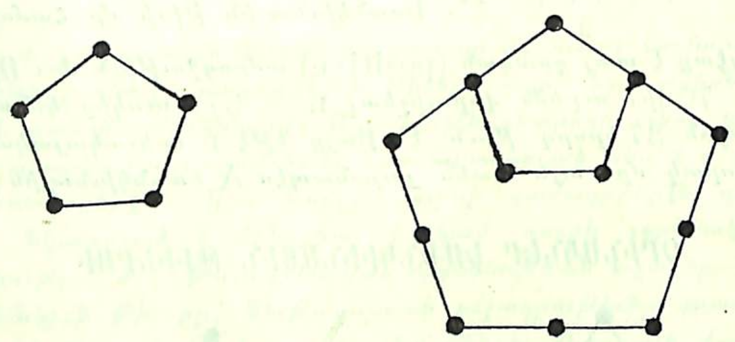
ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԹԻՒԵՐՈՒ



Եթէ առնենք թուաբանական շարքերը, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19..., ուր $d = 3$ և իւրաքանչիւր անդամ $= 1 + 3(n-1) = 3n - 2$, և, ինչպէս առաջ՝ կ'ունենանք ուրիշ շարքեր, առնելով առաջին եզրը և յաջորդական գումարները, առաջին երկու, առաջին երեք, առաջին չորս... եզրներուն, կ'ունենանք հնգանկիւն թիւեր 1, 5, 12, 23, 35, 51, 70..., ուր n երորդ անդամի գումարն է 1, 4, 7... առաջին եզրներուն և հաւասար է

$$\frac{n}{2}(1 + 3n - 2) = \frac{n}{2}(3n -).$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ ՀՆԳԱԿԱՆ ԹԻՒԵՐՈՒ



Ընդհանուր ձեւը տրուած է հետեւեալ շարքերէն

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ \text{և այլն.}$$

ուր հասարակաց տարբերութիւնն է d և n երորդ անդամն է $1 + (n - 1d)$: Այս շարքերու եզրներուն գումարն է $\frac{n}{2}\left[2 + (n-1)d\right] = \frac{n^2d - n(d-2)}{2}$: Հիմա եթէ այս ընդհանուր բացատրութեան մէջ, ուրկէ բազմանկիւն թիւերը ծագում կ'առնեն, դնենք $d = 1, 2, 3$, և այլն. կ'ունենանք եռանկիւնային քառակուսի և

հնգանկիւնային եւն. թիւերը: Ուստի եթէ t ով նշանակենք թիւը՝ անկիւններու կամ բազմանկիւնի մը, այն ատեն $d = t - 2$: Հետեւաբար վերոյիշեալ բացատրութիւնը կը դառնայ $\frac{(t-2)n^2 - (t-4)n}{2}$, ուր n կարողութիւնն է բազմանկիւնի թիւերու շարքի թիւին: Ուրեմն եթէ ուզենք գտնել 7 երորդ վեցանկեան թիւը, պէտք է դնենք $t = b$ և $n = 7$ բացատրութեան մէջ, այն ատեն փնտռուած թիւը պիտի ըլլայ

$$\frac{4 \cdot 7^2 - 2 \cdot 7}{2} = \frac{2 \cdot 7(2 \cdot 7 - 1)}{2} = 7 \times 13 = 91.$$

Բազմանկիւնեան թիւերու մասին վերոյիշեալ քննութիւնը տառական թարգմանութիւնն մ'է Հ. Ղուկասի գործէն և ընթերցողին լաւ գաղափար մը կու տայ անոր ոճին և զանազան նիւթերու բացատրութեան մասին:

Հին Հայերէնի հմտութիւն ունեցողի մը՝ այս գիրքը գանձ մ'է տեղեկութեան: Ան կը պարունակէ շատ մը տարբեր տեսակ լուծուած խնդիրներ, առեւտրական մեքենագիտական և բնագիտական, ինչպէս նաեւ զուարճալի պարզ խնդիրներ:

Ինչպէս սովորական է Եւրոպական հեղինակներուն քով՝ այս գիրքը հրահանգներ չի պարունակեր աշակերտին համար: Անոնք պիտի հայթայթուին նոյն ինքն ուսուցչին կողմէն: Ասիկա գովելի ուրիշ պարագայ մ'է որ ուսուցչին կու տայ անհատականութիւն և համարձակութիւն, կիրարկելու իր կարողութիւնները և աշակերտներուն պէտքին համաձայն ընտրել և կամ յօրինել ուրոյն խնդիրներ: Ներկայիս մենք սորկորէն փարած ենք դասագրքի օրինակներուն և փորձերուն՝ առանց առիթ կամ ազատութիւն ունենալու իրականապէս շինիչ և խկատիպ գործեր արտադրելու: Այս տեսակէտով մեզմէ ոմանք պարզ թութակներ են. մենք պէտք է յիշենք որ Եւրոպայի թուաբաններէն ոմանք, որոնք ուսողութեան վրայ արժէքաւոր գործեր արտադրած են և այդ ասպարէզին մէջ տեւական դիրք մը ապահոված, ուսուցիչներ եղած են երկրորդական վարժարաններու մէջ միայն, և շնորհիւ իրենց ուսուցման եղանակին ու պատշաճութեան եղան՝ ինչ որ եղան:

ԲՐՈՖ. ԱՐՄԵՆԱԿ ՇԱՂՈՅԵԱՆ

ԱՌԱՋԻՆ ՏՊԵԱԼ ՀԱՅ ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆԸ

ՄԱՍՆ Ա. (ԹՈՒԱԲԱՆՈՒԹԻՒՆ ԵՒ ԳՐԱՀԱՇԻՒ)

ԾԱՆ. – Սոյն տիտղոսին տակ Հ. Գ. Տէրտէրեան, 1843ին և 1863ին հրատարակեց ի Վիեննա ամբողջական գործ մը՝ երեք հատորներով, որ իր տեսակին մէջ եզական էր մեր ազգին մէջ իր ատենին, – գործ մը որ կը ներկայացնէր, իբրեւ Միութիւն մը, մեր վարժարաններու մէջ աւանդուած ամբողջ Ուսողութեան, – թուաբանութիւն, գրահաշիւ, երկրաչափութիւն, եռանկիւնաչափութիւն և հատուածք կոնի, տալով միանգամայն Հայ ուսողական բառերու ցուցակ մը գերմաներէն ու ֆրանսերէն նշանակութեամբ: Նկատելով այս գործը իբրեւ ամբողջութիւն մը, ինչպէս նաեւ անոր ներքին արժանիքը, Հ. Տէրտէրեանի գործը արժանի է հռչակուելու իբրեւ մեր առաջին տպեալ հայ ուսողութիւն (Mathematics): Եւ սակայն որպէս զի ընթերցողը սխալ չհասկնայ յայտարարութիւնս, հետեւեալ տողերը կ'ուզեմ աւելցնել, իբրեւ լրացուցիչ յօդուածիս, և չեշտել Վենետկոյ Մխիթարեանց ուսողական հրատարակութեանց ժամանակը, ինչպէս նաեւ անոնց ներքին արժանիքը, յուսալով վերջէն ներկայացնել ընդարձակ մանրամասնութիւններ առանձին յօդուածներով:

Յօդուածս արդէն պատրաստ էր և «Բազմավէպ»ի խմբագրութեան յանձնուած, երբ իմ ազնիւ բարեկամ Հ. Եղիա Փէչիկեանէն ստացայ ինծի անծանօթ՝ հետեւեալ ուսողական հազուագիւտ հատորները տպեալ Վենետկոյ Մխիթարեանց տպարանէն, որոնց ամէնքը Հ. Տէրտէրեանի գործէն շատ առաջ տպուած են ինչպէս պիտի տեսնենք ստորեւ։

(1) ԹՈՒԱԲԱՆՈՒԹԻՒՆ, գրաբար և ընդարձակ։– Հեղինակ՝ Հ. Սուքիաս Աղամալեան։ – Տպեալ, 1781, էջ 511 + 17 (Աղիւսակ նշանակաց հասարակ թուոց 1էն մինչեւ 10,000, վեց տասնորդական թուով)։ Այս գիրքը ճշմարտապէս հոյակապ գործ մըն է, և 528 էջերով կը բացատրէ և բազմաթիւ օրինակներով կը լուսաբանէ թուաբանութեան տարրական և բարձրագոյն մասերը։ Գործը բաժնուած է երկու գրքի։ Ա. գրքին մէջ, Հ. Աղամալեան չորս գործողութիւնը մանրամասն բացատրելէ յետոյ, 97 էջին վրայ կը սկսի կոտորակներու և անոնց գործողութեանց նոյնչափ մանրամասն բացատրութիւնը։ Հատուած Գ. կը սկսի Համեմատութեամբ և կը գրաւէ 75 էջ, ուր կը մեկնաբանուին ուղիղ և խոտոր համեմատութիւն, ընկերութեան, յարակցութեան, միակ և կրկնակ դրութեանց կանոնները, բազմաթիւ օրինակներով լուսաբանուած։ Ընթերցողին գաղափար մը տալու համար, առնենք օրինակ մը 239 էջէն, ուր հեղինակը կը խօսի Յաղագս յանդիման առնելոյ զխարդախութիւն ոսկերչին ի թագն Հերովնի արքայի։ Պատմի զՀերովնէ արքայէ Սիրակուսայ, թէ ետ շինել թագ մի ոսկի ի ձօնել դիցն։ իսկ ոսկերիչն որ շինեաց զայն՝ գողացաւ յոսկւոյ անտի և խառնեաց ընդ այնր զարծաթ։Այլ Արքիմեդէս չափաբանն քաջ յանդիման արար զդաւաճանութիւն նորա, բայց թէ որո՞վ արուեստիւ առանձին, չէ յայտ լիով։ Ասեն, թէ արար երկուս զանգուածս, ըստ կշռոյ և ըստ ծանրութեան թագին. զմինն ի մաքուր ոսկւոյ և զմիւսն ի յստակ արծաթոյ։ Եւ զերեսին զայնոսիկ, այսինքն զթագն և զերկոսին զանգուածն, արկեալ ուրոյն ուրոյն յանօթ լի ջրով, քննեաց զգուշութեամբ զջուրն, որ ելանէր զեղանէր արտաքս յանօթոյ անտի յարկանել անդ զիւրաքանչիւր զնոսա։ Եւ ծանեաւ աստի թուաբանական հաշուովն, թէ որչափ ոսկի կայր ի թագն, և որչափ արծաթ խառնեալ»։ Այս պատմականն ընելէ յետոյ, Հ. Աղամալեան կը նուիրէ ոչ նուազ քան հինգ էջ մանրամասն բացատրելու համար արքիմեդեան սա հռչակաւոր խնդիրը։ Կարեւոր է հոս յիշատակել որ սոյն խնդրոյ միջոցով Արքիմեդէս գտաւ տեսակարար ծանրութեան կարեւոր սկզբունքը։

Երրորդ Հատուածին վերջ տրուած է ՑՈՒՑԼՈՒԱԾ մը (էջ 245-293), ուր չորս գլուխներու մէջ հեղինակը կը խօսի առեւտրական հաշիւներու մէջ գործածուած 11 խնդիրներու վրայ՝ տալով իւրաքանչիւրի լուծումը։ Իբրեւ օրինակ տանք խնդիր ժա. (էջ 291.) «Ցորենավաճառք երկու բարձեալ տանէին ցորեանս ի վաճառել, առաջինն ի նոցանէ ունէր չափս 28. իսկ երկրորդն ունէր չափս 22։ Ի հանդիպիլ նոցա մաքսաւորին, իբրեւ չունէին դրամս ի վճարել զմաքսն, ետուն նմա նոքա իւրաքանչիւր՝ փոխանակ դրամոյ՝ մի մի չափ ցորենոյ։ Եւ քանզի գին իւրաքանչիւր չափու՝ աւելի էր քան զմաքսն, հատոյց անդրէն մաքսաւորն առաջնոյն ի նոցանէ՝ փարայս 4. իսկ երկրորդին հատոյց փարայս 19։ Արդ խնդրի նախ, թէ ո՞րչափ ինչ էր մաքսն առ իւրաքանչիւր բոլոր ցորենոյն, և երկրորդ՝ թէ ո՞րչափ ինչ էր գին իւրաքանչիւր չափու»։

Գ. ԳԻՐՔԸ չորս հատուածի բաժնուած է (էջ 293 –511)։ Առաջինին նուիրուած են վեց գլուխ, ուր աւելի լայնօրէն կը բացատրուին թիւերու մասերը և անոնց տեսակները (նախնական, բաղադրական, զոյգ, անզոյգ, մակարդակ, կայուն քառակուսի, խորանարդ, կատարեալ և ոչ կատարեալ)։ Այս անուններէն ոմանք, թէպէտ չեն գործածուիր ներկայ թուաբանական գործոց մէջ, պատմականօրէն և տեսականօրէն կարեւոր են. և կ'արժէ ուսումնասիրել զանոնք։ Հեղինակը նոյն հատուածի մնացեալ չորս գլուխներուն մէջ կը բացատրէ քառակուսի և քառակուսի արմատ, խորանարդ և խորանարդ արմատ, լուսաբանելով ամէն պարագայ շատ մը տեսական ու գործնական խնդիրներով։ Անկէ յետոյ կու գան համեմատութեան աւելի դժուարին ու տեսական մասեր, ինչպէս նաեւ թուաբանական ու երկրաչափական համեմատութիւններ։

Նոյն Գրքի հատուած Բ. կը շարունակէ Յառաջատուութիւնը վեց երկար գլուխներով (էջ 364 –445) և կը պարունակէ շատ մը տեսական ու գործնական խնդրոց լուծումը։ Սոյն հատուածին վերջը կը գտնուի (էջ 440–455) Արքիմեդեան ուրիշ պատմական խնդիր մը, ուր Հ. Աղամալեան, երկրաչափական յառաջատուութեան զարմանալի յատկութիւնը ցոյց տալու համար, կը հաշուէ աւազներու թիւը երկրի, և «յերկրէ մինչեւ ցհաստատութիւն, այսինքն է՝ մինչեւ ցկամարն աստեղաց» (էջ 446)։ Տես նաեւ Արքիմեդէսի Ψαμμιτής (Աւազահամար)

ՀԱՏՈՒԱԾ Գ. կը խօսի կատարեալ և բազմանկիւն թիւերու, զուգադրութեանց և փոխադրութեանց վրայ (էջ 445-488)։ Կատարեալ և բազմանկիւն թուոց ուսումնասիրութիւնը կարեւոր է պատմականօրէն և տեսականօրէն. դժբախտաբար սակայն ասոնք զանց առնուած են արդի թուագիտական դասագրքերէն։

ՀԱՏՈՒԱԾ Դ. նուիրուած է նշանակներուն և անոնց գործածութեանց (էջ 484 – 511)։

Ամբողջ գիրքը հիանալի գործ մըն է ու պատիւ կը բերէ թէ հեղինակին և թէ Վենետկոյ բազմերախտ Մխիթարեան Հայրերուն։ Ընթերցողը նկատելու է որ Հ. Աղամալեանի այն մեծ գործը գրուած է ասկէ 155 և Հ. Տէրտէրեանի գործէն 67 տարի առաջ։ Տողերուս գրողը մտադիր է ի մօտոյ առանձին և աւելի երկար յօդուածով մը գրախօսական մը գրել այս ընտիր երկի մասին։

(2) ՀԱՄԱՌՕՏ ԹՈՒԱԲԱՆՈՒԹԻՒՆ, աշխարհաբար։ – Հեղինակ Հ. Խաչատուր Սիւրմէլեան։– Տպ. 1788. էջ 160։ Բ. Տպագրութիւն 1817, էջ 171։ Այս գիրքը գրուած է իբրեւ Նախապատրաստութիւն Աղամալեանի ընդարձակ գիրքը հասկնալու համար։ Հեղինակը ժամանակուան աշխարհաբար լեզուով կը բացատրէ թուագիտութեան տարրական մասերը.– չորս գործողութիւն, կոտորակներ, համեմատութիւն և յարակից նիւթեր ու անոնց առեւտրական գործածութիւնը. Բ. տպագրութեան գործին վերջ հետաքրքրական յաւելուած մ'ալ ունի թուաբանական զուարճալիքներու վրայ։ Ա. տպագրութեան մէջ հեղինակը տեղ տեղ հասարակ թիւրքերէն բառեր կը գործածէ, ինչպէս, հիչ, խօշայ, հիսապ, ամա եւն. իսկ երկրորդ տպագրութենէն վտարուած են թիւրքերէն հասարակ բառեր, միայն պահելով գիտականները, ինչպէս օրինակ՝ ձէմ, ղըքմա, թաքսիմ, բերագի եւն։ Այս գործը հրատարակուած է ասկէ 148 և Հ. Տէրտէրեանի գործէն 58 տարի առաջ։

(3) ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ, գրաբար, երեք գրքերու բաժնուած, այսինքն՝ երկայնաչափութիւն, մակարդակաչափութիւն և հաստատաչափութիւն, տեսական ուսուցմամբ, և բազմաթիւ ձեւերով։– Հեղ. Հ. Սահակ Պրոնեան։ – Տպ. 1794, էջ 423։ Դժբախտաբար այս հազուագիւտ գործը ձեռքիս տակ չունիմ, ուստի անկարող եմ աւելի մանրամասնութիւն ներկայացնել հոս։

(4) ԵՌԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ, գրաբար, երկու մասերու բաժնուած, մակարդակ եւ գնդային։ Կ'ուսուցանէ տեսական և գործնական կերպերով՝ չափել լերանց, աշտարակաց և աստղերու հեռաւորութիւնն ու բարձրութիւնը։ Գործին վերջը կան նշանակներու երեք Աղիւսակներ։– Հեղինակ՝ Հ. Սահակ Պրոնեան։– Տպ. 1810, էջ 104+ Աղիւսակներ և Ջեւերու Տախտակներ։ Ասիկա շարունակութիւն է հեղինակին երկրաչափական գործին (տես վերեւ) ինչպէս յայտնի է յառաջաբանէն՝ ուր կ'ըսէ. «Երկրաչափութիւն... յօրինեալ էր ըստ կարգի իբրեւ նախադուռն եռանկիւնաչափութեանս»։

Առաջին 46 էջերը նուիրուած են մակարդակ եռանկիւնաչափութեան, ուր Հ. Պրոնեան լայնօրէն կը բացատրէ եռանկիւնաչափութեան զանազան սահմաններ և հանգամանքներ, կը ներկայացնէ ուղղանկիւն եռանկեանց և խոտորանկիւն եռանկեանց լուծումներ նախ առանց նշանակներու և ապա նշանակներով (էջ 11-16, 17-46)։

ԳՆԴԱԿԱՆ եռանկիւնաչափութիւնը կը սկսի 47 էջով, և կը գրաւէ գործին մնացեալ մասը։– Ընդամէնը 57 էջ, ուր կը բացատրուին զանազան սահմաններ ու հանգամանքներ գնդական եռանկիւնաչափութեան, ինչպէս նաեւ գործին մէջ պէտք եղած գնդական երկրաչափութիւն։ Ապա կը յաջորդեն լուծումներ ուղղանկիւն գնդական եռանկեանց և խոտորանկիւն գնդական եռանկեանց լուծումներ (էջ 57-79) խնամով լուսաբանուած աշխարհագրական և աստեղագիտական հետաքրքրական օրինակներով։

Գործին վերջ կայ Յաւելուած մը, ուր հեղինակը կը բացատրէ և կը լուսաբանէ.

1 կարկնի համեմատութիւն,
2 հաւասարամասն գործադրութիւն,
3 եղանակ հաշուի փոխանակութեան դրամոց,
4 գործադրութիւն գծից լարից,
5 » » մակարդակաց,
6 » » բազմանկեանց,
7 » » հաստատնոց,
8 » » հրահալելեաց, և
9 Անգղիական կարկին համեմատութեան։

Տողերուս գրողը մտադիր է այս հազուագիւտ գործին վրայ եւս աւելի ընդարձակ յօդուած մը գրել՝ ժամանակս երբ ներէ։

ԲՐՈՖ. Ա. ՇԱՂՈՅԵԱՆ