

ИЗБЫТОЧНОСТЬ БИФРЕЙМОВ

М. А. ХАСАНХАНИ ФАРД

Университет Валиаср Рафсанджана, Рафсанджан, Иран
E-mail: *m.hasankhani@vru.ac.ir*

Аннотация. В данной статье рассматривается избыточность бифреймов в сепарабельных гильбертовых пространствах и представлены некоторые свойства верхней и нижней избыточности бифреймов.

MSC2020 numbers: 32C15; 42C15.

Ключевые слова: Фрейм, бифрейм, функция избыточности; нижняя избыточность; верхняя избыточность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция фреймов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ была первоначально введена Даффином и Шеффером в контексте негармонического ряда Фурье [1]. За последнее десятилетие были предложены различные обобщения фреймов, такие как фреймы подпространств, псевдофреймы, косые фреймы, непрерывные фреймы, фреймы слияния, g -фреймы и т. д. Концепция фреймов Парсеваля с равной нормой на конечномерных гильбертовых пространствах была впервые введена Касаццей и Леонардом в [2, 3] и очень быстро развивалась в течение последних десяти лет, особенно в контексте вейвлетов и систем Габора.

Если задано сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и счетным множеством индексов I , то последовательность $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ в $\mathcal{H}$ называется фреймом для $\mathcal{H}$, если существуют константы $A > 0$, $B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathcal{H}$

$$(1.1) \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leq B \|x\|^2,$$

где A, B — соответственно нижняя и верхняя границы фрейма. Второе неравенство условия фрейма (1.1) также известно как условие Бесселя для $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$. Фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жёсткий фрейм с $\|f_i\| = c$ для всех $i \in I$ называется жёстким фреймом с c -равной нормой, а жёсткий фрейм с границами 1 называется фреймом Парсеваля.

Ограниченный линейный оператор $S_{\mathcal{F}}$, определяемый равенством

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_{\mathcal{F}}x = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle f_i$$

называется фрейм оператором $\mathcal{F}$. Известно, что фрейм оператор S является положительным, самосопряженным и обратимым оператором.

Два фрейма $\{f_i\}_{i \in I}$ и $\{g_i\}_{i \in I}$ являются дуальными фреймами для $\mathcal{H}$, если

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, g_i \rangle f_i, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Фрейм $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^m$, определенный $\tilde{f}_i = S^{-1}f_i$ для $i \in I$, является дуальным фреймом фрейма $\{f_i\}_{i \in I}$, и называется каноническим дуальным фреймом $\{f_i\}_{i \in I}$. Более подробную информацию о фреймах см. в [4] – [9].

Фреймы — это избыточные наборы векторов в гильбертовом пространстве, которые дают естественное представление каждого вектора в пространстве, но могут иметь бесконечно много различных представлений для любого данного вектора. Именно эта избыточность делает фреймы полезными в приложениях. В обработке сигналов эта концепция стала очень полезной при анализе полноты и устойчивости линейных дискретных представлений сигналов.

Соотношение количество векторов фрейма и измерения определяется как избыточность фрейма в конечномерном случае, что является удовлетворительным определением. Более точное количественное понятие избыточности для конечных фреймов (нижняя и верхняя избыточности) было введено в [10]. Это количественное понятие избыточности обобщено на бесконечные фреймы в [11]. В этой статье мы обобщили количественное понятие избыточности на бифреймы [12] и представили некоторые из его свойств.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Бифреймы определены в [12] следующим образом.

Определение 2.1. Пара последовательностей $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ в $\mathcal{H}$ называется бифреймом для $\mathcal{H}$ если существуют положительные константы A и B такие, что для всех $x \in \mathcal{H}$

$$(2.1) \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq B \|x\|^2.$$

A, B называются, соответственно верхним и нижним границами бифрейма. Бифрейм $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ называется A -жестким фреймом, если $A = B$. Жесткий бифрейм с границей A , с $\|f_i\| = c$ и $\|g_i\| = d$, для всех $i \in I$, называется A -жестким

бифреймом с (c, d) -нормой, а жесткий бифрейм с границей 1 называют бифреймом Парсеваля. Ограниченный линейный оператор $S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ определенный равенством

$$S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}x = \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle g_i$$

называется бифрейм оператором бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Известно, что $S_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ является положительным, самосопряженным и обратимым оператором [12].

В случае бесконечного I ряды в (1.1) и (2.1) сходятся. Ряд в (1.1) сходится безусловно, а следующий пример показывает, что ряд в (2.1) может сходиться условно.

Пример 2.1. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим следующие последовательности

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\infty} &= \left\{ e_1, e_2, \frac{2^3}{2}e_2, -\frac{2^3}{2}e_2, e_3, \frac{3^3}{2}e_3, -\frac{3^3}{2}e_3, \dots, e_n, \frac{n^3}{2}e_n, -\frac{n^3}{2}e_n \dots \right\}, \\ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} &= \{e_1, e_2, e_1, e_1, e_3, e_1, e_1, \dots, e_n, e_1, e_1 \dots\}. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$

следовательно, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – фрейм Парсеваля для $\mathcal{H}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=2}^{\infty} i^3 |\langle x, e_i \rangle \langle e_1, x \rangle|.$$

Теперь, для $x_0 := e_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} e_j$, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_0, f_i \rangle \langle g_i, x_0 \rangle| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle e_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} e_j, e_i \right\rangle \right|^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{\infty} i^3 \left| \left\langle e_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} e_j, e_i \right\rangle \left\langle e_1, e_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} e_j \right\rangle \right| = \left| 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} j = \infty. \end{aligned}$$

Согласно [13, Теорема 3.54], существует перестановка σ натуральных чисел $\mathbb{N}$ такая, что $\liminf S_{\sigma(n)} = 0$ и $\limsup S_{\sigma(n)} = 1$, где

$$S_{\sigma(n)} := \sum_{i=1}^n \langle x_0, f_{\sigma(i)} \rangle \langle g_{\sigma(i)}, x_0 \rangle.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_0, f_i \rangle \langle g_i, x_0 \rangle$ сходится условно.

Бодман, Касаза и Кутинёк ввели количественное понятие избыточности для конечных фреймов, а Кэхилл, Касацца и Хайнеке обобщили его на бесконечные фреймы.

Определение 2.2. [10] Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – фрейм в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Функция избыточности $\mathcal{F}$ определяется на единичной сфере $\mathbb{S} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) := \sum_{i \in I} \|P_{\langle f_i \rangle}(x)\|^2,$$

где $P_{\langle f_i \rangle}$ – ортогональная проекция на $\langle f_i \rangle := \text{span}\{f_i\}$.

Верхняя и нижняя избыточности $\mathcal{F}$ определяются так:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ := \sup_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^- := \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x),$$

Кроме того, $\mathcal{F}$ имеет равномерную избыточность, если $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^- = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$.

Свойства нижней и верхней избыточности для фреймов можно найти в [10, Теорема 2.1] и [11, Теорема 3.1].

Поскольку нулевые векторы не оказывают влияния на избыточность, в этой статье мы предполагаем, что $f_i \neq 0$ для всех $i \in I$. Таким образом,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(x) := \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2}.$$

Мы определяем избыточность бифреймов следующим образом.

Определение 2.3. Пусть $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Функция избыточности бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяется на единичной сфере $\mathbb{S} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ следующим образом

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) := \sum_{i \in I} \|P_{\langle f_i \rangle}(x)\| \|P_{\langle g_i \rangle}(x)\|,$$

где $P_{\langle f_i \rangle}$ – ортогональный проектор на $\langle f_i \rangle := \text{span}\{f_i\}$, а $P_{\langle g_i \rangle}$ – ортогональный проектор на $\langle g_i \rangle := \text{span}\{g_i\}$.

Верхняя и нижняя функции избыточности $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяются так

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ := \sup_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- := \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x).$$

При этом, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ имеет равномерную избыточность, если $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.

Так как нулевые векторы не влияют на избыточность, далее будем считать, что $f_i \neq 0$ и $g_i \neq 0$, для всех $i \in I$. Таким образом,

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) := \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|}.$$

Очевидно, если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – фрейм в $\mathcal{H}$, то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^- = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^+ = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$. Кроме того, применив неравенство Коши-Шварца, легко видеть, что если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – такие фреймы в $\mathcal{H}$, что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является бифремом,

то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+}$. В конечномерном Гильбертовом пространстве нижняя функция избыточности бифрейма больше нуля, а верхняя функция избыточности конечна.

Утверждение 2.1. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифреймы в конечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$ достигаются, и $0 < \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$.

Доказательство. В силу непрерывности отображения $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ на компактное множество $\mathbb{S}$, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$ достигаются. При $x \in \mathbb{S}$

$$0 < \frac{A}{MM'} \leq \frac{1}{MM'} \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \leq \sum_{i \in I} \frac{\|f_i\| \|g_i\|}{\|f_i\| \|g_i\|} = |I|,$$

где A – нижняя функция избыточности бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $M = \sup_{i \in I} \|f_i\|$, и $M' = \sup_{i \in I} \|g_i\|$. Следовательно, $0 < \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$. $\square$

Следующие два примера показывают, что это утверждение ошибочно для бесконечных бифреймов.

Пример 2.2. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим бифрейм $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, определенный ниже.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{f_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ e_1, e_1, e_2, \frac{1}{2}e_1, e_3, \frac{1}{4}e_1, e_4, \frac{1}{8}e_1, \dots, e_n, \frac{1}{2^{n-1}}e_1 \dots \right\}, \\ \mathcal{G} &= \{g_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ e_1, e_1, e_2, \frac{1}{2}e_1, e_3, \frac{1}{4}e_1, e_4, \frac{1}{8}e_1, \dots, e_n, \frac{1}{2^{n-1}}e_1 \dots \right\}. \end{aligned}$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle &= \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) |\langle x, e_1 \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 + \frac{4}{3} |\langle x, e_1 \rangle|^2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \frac{7}{3} \|x\|^2.$$

Таким образом, $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является бифреймом в $\mathcal{H}$. Далее, для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) &= \sum_{i=1}^\infty \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, x \right\rangle \right| \\ &= \sum_{i=1}^\infty |\langle x, e_i \rangle|^2 + |\langle x, e_1 \rangle| + |\langle x, e_1 \rangle| + |\langle x, e_1 \rangle| + \dots, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(e_1) = \infty$.

Пример 2.3. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормальный базис в бесконечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим бифрейм $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, определённый ниже.

$$\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_2 - e_1, e_2 + e_1, e_3 - 2e_1, e_3 + 2e_1, e_4 - 3e_1, e_4 + 3e_1 \dots\},$$

$$\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4, e_4 \dots\}.$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle = |\langle x, e_1 \rangle|^2 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2,$$

следовательно,

$$\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq 2 \|x\|^2.$$

Значит $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_i}{\|g_i\|}, x \right\rangle \right| \\ &= |\langle x, e_1 \rangle|^2 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + 1}} |\langle x, e_i - (i-1)e_1 \rangle \langle e_i, x \rangle| \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + 1}} |\langle x, e_i + (i-1)e_1 \rangle \langle e_i, x \rangle|, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}(e_n) = \frac{2}{\sqrt{(n-1)^2 + 1}}$, для любого натурального $n \geq 2$. Значит $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = 0$.

Следующее утверждение описывает класс бифреймов с равномерной избыточностью.

Утверждение 2.2. Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – фреймы в $\mathcal{H}$ с нормами, равными, соответственно, c и d , с верхними фрейм границами A , такие что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм с нижней фрейм границей A , тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{+} = \frac{A}{cd}$.

Доказательство. Для всех $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{A}{cd} &\leq \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| \\ &\leq \frac{1}{cd} \left(\sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} |\langle x, g_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{cd}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \frac{1}{cd} \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| = \frac{A}{cd}.$$

Значит, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{+} = \frac{A}{cd}$. □

Следующее следствие, непосредственно вытекающее из утверждения выше описывает класс жестких фреймов с равномерной избыточностью.

Следствие 2.1. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ – A -жесткий фрейм с c -нормой, а $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – A -жесткий фрейм с d -нормой, такие что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – A -жесткий бифрейм в $\mathcal{H}$, тогда, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = \frac{A}{cd}$.*

Дуальные фреймы с единичной нормой с верхней избыточностью не более 1, образуют бифрейм с равномерной избыточностью 1.

Утверждение 2.3. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – дуальные фреймы с единичной нормой в $\mathcal{H}$, и $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+ \leq 1$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = 1$.*

Доказательство. Для всех $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^2 &= \sum_{i \in I} \langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle \leq \sum_{i \in I} |\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle| \\ &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+ \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+} \leq 1, \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ = 1$. $\square$

Бифрейм, образованный биортогональной последовательностью, имеет избыточность не более 1. Если биортогональные последовательности имеют также и единичную норму, тогда верхняя избыточность бифрейма больше или равна 1.

Утверждение 2.4. *Если $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – биортогональные последовательности в $\mathcal{H}$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq 1$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \sup_{i \in I} \frac{1}{\|f_i\| \|g_i\|}$.*

Доказательство. Для всех $j \in I$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) &= \sum_{i \in I} \frac{\left| \left\langle \frac{f_j}{\|f_j\|}, f_i \right\rangle \left\langle g_i, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \right|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \left| \left\langle \frac{f_j}{\|f_j\|}, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \left\langle \frac{g_j}{\|g_j\|}, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right\rangle \right| = \frac{|\langle f_j, g_j \rangle|}{\|f_j\| \|g_j\|} \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) \leq 1$. Также $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+\left(\frac{f_j}{\|f_j\|}\right) = \frac{|\langle f_j, g_j \rangle|}{\|f_j\| \|g_j\|} = \frac{1}{\|f_j\| \|g_j\|}$. Значит, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \geq \sup_{i \in I} \frac{1}{\|f_i\| \|g_i\|}$. $\square$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов аддитивны относительно объединения ортонормальных базисов.

Утверждение 2.5. *Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$, и $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j \in J}$ – ортонормальный базис в $\mathcal{H}$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^- = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^+ = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}(x) = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} + \sum_{j \in J} \frac{|\langle x, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle|}{\|e_j\| \|e_j\|} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(x) + 1,$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^- = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{E}, \mathcal{G} \cup \mathcal{E})}^+ = 1 + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$. $\square$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов, соответственно, субаддитивны и супераддитивны относительно объединения фреймов. Они также аддитивны, если избыточность равномерна.

Утверждение 2.6. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}') = (\{f'_j\}_{j \in J}, \{g'_j\}_{j \in J})$ – бифреймы в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ < \infty$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+ < \infty$, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$. В частности, если $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ имеют равномерную избыточность, тогда $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')$ также имеет равномерную избыточность $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$.

Доказательство. Для любых $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} + \sum_{j \in J} \frac{|\langle x, f'_j \rangle \langle g'_j, x \rangle|}{\|f'_j\| \|g'_j\|} \\ &= \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) \end{aligned}$$

следовательно, $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) = \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-(x) = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-(x) + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-(x) \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$, откуда следует, что $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \geq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$.

Кроме того, если $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ имеют равномерную избыточность, тогда $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^- \leq \mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^-$. Значит $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')$ имеет равномерную избыточность $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^-$ и $\mathcal{R}_{(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{G} \cup \mathcal{G}')}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ + \mathcal{R}_{(\mathcal{F}', \mathcal{G}')}^+$. $\square$

Избыточность бифрейма инвариантна относительно сдвига векторов бифрейма.

Утверждение 2.7. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$, а c_i, d_i – числа, тогда $\mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^- = \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^-$ и $\mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^+ = \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^+$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $c_i, d_i \neq 0$, для всех $i \in I$. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})}^-(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, c_i f_i \rangle \langle d_i g_i, x \rangle|}{\|c_i f_i\| \|d_i g_i\|} = \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \mathcal{R}_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}^-(x) \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathcal{R}^-_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^-_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}, \quad \mathcal{R}^+_{(\{c_i f_i\}_{i \in I}, \{d_i g_i\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^+_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}.$$

Верхняя и нижняя избыточности бифреймов с конечной верхней избыточностью инвариантны относительно перестановки векторов бифрейма, т.е., если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ с $\mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} < \infty$ и σ – перестановка в I , тогда

$$\mathcal{R}^-_{(\{f_{\sigma(i)}\}_{i \in I}, \{g_{\sigma(i)}\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^-_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}, \quad \mathcal{R}^+_{(\{f_{\sigma(i)}\}_{i \in I}, \{g_{\sigma(i)}\}_{i \in I})} = \mathcal{R}^+_{(\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})}.$$

Избыточность бифреймов связана с избыточностью бифреймов, индуцированной действием обратимого оператора на векторы бифрейма. В частности, избыточность бифреймов инвариантна относительно применения унитарного оператора. Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если оператор $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обратим, тогда $\mathbb{S} = \left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\}$.*

Доказательство. Так как $\left\| \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|} \right\| = 1$, для любого $x \in \mathbb{S}$, имеем, что

$$\left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\} \subseteq \mathbb{S}.$$

С другой стороны, если $x \in \mathbb{S}$, тогда $x = \frac{x}{\|x\|} = \frac{\Lambda \Lambda^{-1} x}{\|\Lambda \Lambda^{-1} x\|} = \frac{\Lambda \left(\frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \right)}{\left\| \Lambda \left(\frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \right) \right\|} = \frac{\Lambda y}{\|\Lambda y\|}$,

где $y := \frac{\Lambda^{-1} x}{\|\Lambda^{-1} x\|} \in \mathbb{S}$, и следовательно $\mathbb{S} \subseteq \left\{ \frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|}; \quad \|x\| = 1 \right\}$. $\square$

Утверждение 2.8. *Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – обратим, тогда $(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и*

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}^-_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \leq \mathcal{R}^-_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})} \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}^-_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})},$$

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \leq \mathcal{R}^+_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})} \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}^+_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}.$$

Доказательство. Так как $\|x\| = \left\| (V^*)^{-1} V^* x \right\| \leq \|V^{-1}\| \|V^* x\|$, то для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$A \|V^{-1}\|^{-2} \|x\|^2 \leq A \|V^* x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle x, V f_i \rangle \langle V g_i, x \rangle \leq B \|V^* x\|^2 \leq B \|V\|^2 \|x\|^2,$$

где A, B границы бифрейма $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и следовательно, $(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$.

Далее, так как $\|x\| = \|V^{-1}Vx\| \leq \|V^{-1}\| \|Vx\|$, то для всех $x \in \mathcal{H}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, Vf_i \rangle \langle Vg_i, x \rangle|}{\|Vf_i\| \|Vg_i\|} \leq \|V^{-1}\|^2 \sum_{i \in I} \frac{|\langle V^*x, f_i \rangle \langle g_i, V^*x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V^*x\|^2 \sum_{i \in I} \frac{\left| \left\langle \frac{V^*x}{\|V^*x\|}, f_i \right\rangle \left\langle g_i, \frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right\rangle \right|}{\|f_i\| \|g_i\|} = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V^*x\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) \end{aligned}$$

при $x \in \mathbb{S}$. Применив лемму 2.1, находим $\mathbb{S} = \left\{ \frac{V^*x}{\|V^*x\|}; \|x\| = 1 \right\}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- &= \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}(x) \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \inf_{x \in \mathbb{S}} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})} \left(\frac{V^*x}{\|V^*x\|} \right) = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- &= \mathcal{R}_{(V^{-1}V\mathcal{F}, V^{-1}V\mathcal{G})}^- \leq \left\| (V^{-1})^{-1} \right\|^2 \|V^{-1}\|^2 \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- = \\ &= \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^-. \end{aligned}$$

значит $\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^-$. Итак,

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^- \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-.$$

Аналогично,

$$\|V^{-1}\|^{-2} \|V\|^{-2} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+ \leq \mathcal{R}_{(V\mathcal{F}, V\mathcal{G})}^+ \leq \|V^{-1}\|^2 \|V\|^2 \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+. \quad \square$$

Так как унитарные операторы имеют единичную норму, из утверждения непосредственно вытекает

Следствие 2.2. Если $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (\{f_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$ и оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ унитарен, тогда $\mathcal{R}_{(U\mathcal{F}, U\mathcal{G})}^- = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-$ и $\mathcal{R}_{(U\mathcal{F}, U\mathcal{G})}^+ = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^+$.

Для любого $x \in \mathbb{R}$ наибольшее целое число не превосходящее x обозначим через $\lfloor x \rfloor$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$ – фреймы в конечномерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такие, что $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ – бифрейм в $\mathcal{H}$. Если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+$, тогда $\mathcal{F}$ можно разбить на $\lfloor \frac{(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^+} \rfloor$ множеств, а если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^- \right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+$, то $\mathcal{G}$ можно разбить на $\lfloor \frac{(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^-)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^+} \rfloor$ множеств..

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{S}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}(x) &= \sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle \langle g_i, x \rangle|}{\|f_i\| \|g_i\|} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, g_i \rangle|^2}{\|g_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \left(\sum_{i \in I} \frac{|\langle x, f_i \rangle|^2}{\|f_i\|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \leq \sum_{i \in I} \left| \left\langle x, \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\rangle \right|^2,$$

откуда следует, что $\left\{ \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\}_{i \in I}$ – нормированный фрейм в $\mathcal{H}$ с нижней границей $\frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}}$. Если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}$, то применив [14, Предложение 3.5], $\left\{ \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\}_{i \in I}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \rfloor$ множества и значит $\mathcal{F}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{+}} \rfloor$ множества.

Аналогично можем доказать, что если $\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2 \geq \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}$, то $\mathcal{G}$ можно разбить на $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor$ множества. $\square$

Замечание 2.1. Последняя теорема не верна в бесконечном случае. В качестве контрпримера рассмотрим нормированный 2-жесткий фрейм $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ в ℓ_2 который нельзя разбить на два множества [11], но $\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{-} = \mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{+} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{-} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+} = 2$ и поэтому, $\lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{(\mathcal{F}, \mathcal{F})}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor = \lfloor \frac{\left(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{-}\right)^2}{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}^{+}} \rfloor = 2$.

Abstract. This paper is concerned with the redundancy of biframes in separable Hilbert spaces and it presents some properties of the the upper and lower redundancy of biframes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 341 – 366 (1952).
- [2] P. G. Casazza and M. T. Leonhard, “Existence and construction of finite tight frames”, J. Concr. Appl. Math., **4**, 277 – 289 (2006).
- [3] P. G. Casazza and M. Leon, “Existence and construction of finite frames with a given frame operator”, Int. J. Pure Appl. Math., **63**, 149 – 158 (2010).
- [4] J. J. Benedetto, Frame Decomposition, Sampling, and Uncertainty Principle Inequalities in Wavelets Mathematics and Applications, Wiley (1999).
- [5] J. Benedetto and M. Fickus, “Finite normalized tight frames”, Advances in Computational Math., **18**, 357 – 385 (2003).
- [6] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkhäuser: Boston, Basel, Berlin (2002).

- [7] C. Heil, D. Walnut, “Continuous and discrete wavelet transform”, SIAM Rev., **31**, 628 – 666 (1969).
- [8] W. Sun, “G-frames and G-Riesz bases”, J. Math. Anal. Appl., **322**, 437 — 452 (2006).
- [9] R. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York (1992).
- [10] B. G. Bodmann, P. G. Casazza, and G. Kutyniok, “A Quantitative Notion of Redundancy for Finite Frames”, Appl. Comput. Harmon. Anal., **30**, 348 – 362 (2011).
- [11] J. Cahill, P. G. Casazza, and A. Heinecke, “A quantitative notion of redundancy for infinite frames”, arXiv:1006.2678v1 [math.FA].
- [12] M. Firouzi Parizi1, A. Alijani and M. A. Dehghan, “Biframes and some of their properties”, J. Inequal. Appl. (<https://doi.org/10.1186/s13660-022-02844-7>).
- [13] W. Rudin, “Principles of mathematical analysis”, International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill (1976).
- [14] B. G. Bodmann, P. G. Casazza, V. I. Paulsen, D. Speegle, “Spanning and independence properties of frame partitions”, Proc. Am. Math. Soc., **140**, 2193 — 2207 (2012).

Поступила 30 мая 2024

После доработки 30 мая 2024

Принята к публикации 12 августа 2024