

**СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ
ДЛЯ ДРОБНЫХ p -ЛАПЛАСОВСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^N$,
ИМЕЮЩИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ**

Р. ПЕИ, К. МА

Тяньшуйский педагогический университет, Тяньшуй, Китай¹
E-mails: *prc211@163.com*; *macaoch@163.com*

Аннотация. Изучаются суперлинейные дробные уравнения p -Лапласиана в $\mathbb{R}^N$ с периодическим потенциалом. Когда нелинейности удовлетворяют критическому экспоненциальному росту (субкритический полиномиальный рост или субкритический экспоненциальный рост) на ∞ без удовлетворения классического условия Амброзетти-Рабиновича, с помощью теоремы о горном перевале и методов многообразия Нехари, в сочетании с дробным неравенством Мозера-Трудингера устанавливаются несколько результатов существования для решений основного состояния.

MSC2020 numbers: 35A15; 35J60; 35R11.

Ключевые слова: дробное уравнение p -Лапласиана; критический экспоненциальный рост; основное состояние; вариационные методы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем следующее дробное уравнение Шредингера:

$$(1.1) \quad \begin{cases} (-\Delta)_p^s u(x) + V(x)|u|^{p-2}u = f(x, u), & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

где $p \in (1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$, $N \geq 2$, а $(-\Delta)_p^s$ дробный p -оператор Лапласа:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Предположения, накладываемые на потенциальную функцию V и нелинейность f , будут перечислены позже.

В последнее время проблемы, связанные с нелокальными операторами, привлекают достаточно много внимания. Фактически, дробные пространства Соболева и нелокальные проблемы играют основную роль в изучении различных наук, таких как финансы, проблема препятствий, фазовые переходы, оптимизация, волны на воде, конформная геометрия и минимальные поверхности.

¹Это исследование поддерживается NSFC (№№ 11661070, 12161077), NSF провинции Ганьсу (№ 22JR11RE193) и Группой инноваций в области нелинейных математических уравнений физики (№ TDJ2022-03).

Изучение проблемы (1.1) с $p = 2$ было стимулировано отчасти поиском стоячих волн для дробных уравнений Шредингера вида

$$(1.2) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-\Delta)^s \psi + (V(x) + \omega) \psi - f(x, \psi).$$

Волны обычно представляются в виде $\psi(x, t) = e^{-i\omega t} u(x)$, где u обозначает действительную функцию. По этой причине f имеет вид $cf(x, e^{-i\omega t} u) = e^{-i\omega t} f(x, u)$. Фактически, (1.2) имеет особое значение в изучении дробной квантовой механики (см. [1, 2]).

В последние годы появилось множество работ, посвященных изучению проблемы (1.2). Например, с использованием различных вариационных инструментов, результаты существования или кратного существования решений стоячей волны для (1.2) изучались в работах [3] – [13]. Хорошо известно, что при решении таких задач компактность вложения Соболева не выполняется из-за неограниченности области. Одним из полезных средств для восстановления компактности является взятие некоторого рабочего пространства со свойствами компактного вложения, например, радикально симметричного функционального пространства (см. [10, 11]). Другой способ — позволить потенциальной функции быть коэрцитивной на бесконечности, что все еще приводит к компактным свойствам вложения рабочего пространства (см. [5, 9, 13]). Авторы [14] исследовали существование решений основного состояния, применяя вариационный метод в сочетании с методом многообразий Нехари при различных гипотезах о нелинейности и потенциале, когда V и f являются периодическими и асимптотически периодическими по x на бесконечности.

Если положить $s = 1$, $p = 2$, (1.1) эквивалентно следующему нелинейному уравнению Шредингера

$$(1.3) \quad -\Delta u + V(x)u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В последние несколько лет появилось много классических работ, посвященных исследованию существования нетривиальных решений, таких как [15, 16, 17] и ссылки в них. В этих и многих других работах часто предполагается следующее известное условие (AR) Амбросетти и Рабиновича [18] :

(AR) существует $\theta > 2$ такое, что $0 < \theta F(x, t) \leq tf(x, t)$, для любых $x \in \mathbb{R}^N$, $t \neq 0$, где $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$.

Когда $f(x, t)$ периодична по x , мы можем вывести, что существуют $\xi_1, \xi_2 > 0$ такие, что $F(x, t) \geq \xi_1 |t|^\theta - \xi_2$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Это означает, что

задача (1.3) является суперквадратичной на бесконечности. Это неудовлетворительно, поскольку есть многочисленные нелинейные члены, которые имеют суперлинейный рост в ∞ , но не удовлетворяют условию (AR), например $f(x, t) = t \ln(1 + |t|^2)$.

Условие (AR) играет важную роль в доказательстве ограниченности последовательностей Пале-Смейла. За последние два десятилетия многие стремились изучить проблему (1.3), ослабляя условие (AR). Вместо этого они рассматривали более слабое условие:

(WSQC)

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} = +\infty, \quad \text{равномерно для } x \in \mathbb{R}^N.$$

Очевидно, (AR) влечет (WSQC). Лю и Ван [19] первыми предложили условие (WSQC), которое применялось в работах [20, 21]. В частности, когда $\sigma(-\Delta + V) \subset (0, +\infty)$, Ли, Ван и Цзэн [21] установили существование решения основного состояния для f , удовлетворяющее некоторым подходящим предположениям и следующему важному условию типа Нехари:

(Ne) $t \mapsto \frac{f(x, t)}{|t|}$ строго возрастает на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Стоит отметить, что их результаты улучшили соответствующий результат, полученный Рабиновичем [17] в 1992 году.

Вдохновленные вышеуказанными работами и совсем недавней статьей [22], посвященной дробному неравенству Мозера-Трудингера, целью данной статьи является исследование существования решений основного состояния для (1.1) с $1 < p \leq \frac{N}{s}$, где нелинейный член $f(x, \cdot)$ включает субкритический или критический экспоненциальный рост (стандартный субкритический полиномиальный рост) на бесконечности.

Теперь представим наши результаты: Предположим, что потенциал $V(x)$ и нелинейность $f(x, u)$ удовлетворяют:

(V₁) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ 1-периодична относительно $x_1, \dots, x_N$, и $V(x) > 0$.

(H₁) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ 1-периодична относительно $x_1, \dots, x_N$.

(H₂) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{|t|^{p-2}t} = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$.

(H₃) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(x, t)}{|t|^p} = +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$.

(H₄) $f(x, t)t - pF(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Наш первый результат относится к проблеме (1.1) при стандартном докритическом полиномиальном росте

$$(\text{SCP}) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{|t|^{q-1}} = 0$$

равномерно для всех $x \in \mathbb{R}^N$, где $q \in (p, p^*)$ ($p^* = \frac{Np}{N-sp}$). В этом случае теорема Соболева о компактном вложении не выполняется из-за неограниченности области. Наша работа заключается в рассмотрении проблемы (1.1), где нелинейный член f не удовлетворяет (AR)-условию ($\theta > p$). Наш нелинейный член имеет больше свободы, т. е. нам требуется только, чтобы $f(x, t)$ удовлетворял условию (H₃) параллельно с (WSQC) ($p = 2$, $s = 1$) в ∞ в некотором смысле без других ограничений. Следовательно, наши классы функций $f(x, t)$ более общие, чем классы предыдущих работ (см., например, [15, 16, 21, 23, 17]). Используя пересмотренную теорему о горном перевале, мы стремимся получить решения основного состояния для задачи (1.1) с $1 < p < \frac{N}{s}$. Наше доказательство ограниченности последовательности (PS) отличается от такового в [24], поскольку мы умело использовали теорему резонанса, объединенную с принципом компактности концентрации Лионса. Фактически, эта новая идея, которая заключается в использовании теоремы резонанса, чтобы гарантировать ограниченность последовательности (PS) для изучения задач Дирихле в ограниченной области, вытекает из [25]. В [26] мы разработали этот метод для изучения дробных p -лапласовских уравнений, определенных в ограниченной области, включающих критический экспоненциальный рост.

Теорема 1.1. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и предположим, что (V₁) и (H₁)-(H₄) выполняются, если f удовлетворяет условию (SCP), то задача (1.1) имеет основное состояние, т. е. нетривиальное решение u_* такое, что

$$\mathcal{J}(u_*) = \inf\{\mathcal{J}(u) : u \neq 0 \text{ и } \mathcal{J}'(u) = 0\},$$

где определение функционала $\mathcal{J}$ в следующем разделе.

Замечание 1.1. Условие (H₃) означает, что наш нелинейный член f весьма универсален.

В частности, наш нелинейный член f не должен удовлетворять условию Нехари (Ne). Таким образом, наша теорема 1.1 улучшает результаты, включенные в [21].

Теперь мы рассмотрим граничный случай теорем вложения Соболева, обычно называемый случаем Мозера-Трудингера, т. е. $ps = N$. Нам понадобится следующее

Утверждение 1.1. (see [22]). Пусть $s \in (0, 1)$, и $ps = N$. Пусть $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ – пространство, определенное как пополнение $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно нормы

$$u \mapsto \left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда существует $\alpha_* > 0$ такая, что

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \mid u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} < +\infty$$

для $\alpha \in [0, \alpha_*)$, и

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \mid u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} = +\infty$$

для $\alpha \in (\alpha_{s,N}^*, +\infty)$, где $\Phi_{N,s}(t) = e^t - \sum_{i=0}^{j_p-2} \frac{t^i}{i!}$, $j_p := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$ и

$$\alpha_{s,N}^* := N \left(\frac{2(N\omega_N)^2 \Gamma(p+1)}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k-1)!}{k!} \frac{1}{(N+2k)^p} \right)^{\frac{s}{N-s}}.$$

Далее мы определяем субкритический экспоненциальный рост и критический экспоненциальный рост соответственно следующим образом:

(SCE): f удовлетворяет субкритическому экспоненциальному росту на $\mathbb{R}^N$, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$ для всех $\alpha > 0$.

(CG): f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту на $\mathbb{R}^N$, если существует $\alpha_0 > 0$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = 0, \quad \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha > \alpha_0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(x, t)|}{\exp \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right)} = +\infty, \quad \text{равномерно по } x \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha < \alpha_0.$$

В случае $ps = N$, когда f удовлетворяет условию (SCE), мы все еще имеем дело с проблемой (1.1), где нелинейный член f не должен удовлетворять условию (AR) ($\theta > p$) на бесконечности. Насколько нам известно, существует мало работ, посвященных изучению этой проблемы с дробным оператором p -Лапласа, определенным во всем пространстве. Следовательно, наши методы являются техническими, а наш результат является новым, поскольку мы успешно использовали теорему о резонансе, объединенную с дробным неравенством Мозера-Трудингера, установленным во всем пространстве, для проверки ограниченности последовательности (PS). Мы формулируем наш результат следующим образом:

Теорема 1.2. Пусть $sp = N$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f удовлетворяет условию (SCE), то задача (1.1) имеет решение в основном состоянии.

В случае $ps = N$, когда f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту, изучение проблемы (1.1) сложнее, чем в случае субкритического экспоненциального роста (CG), поскольку функционал Эйлера-Лагранжа больше не удовлетворяет условию компактности на всех уровнях. Для стандартной эллиптической задачи авторы [27] применили последовательности экстремальных функций, соответствующие неравенству Мозера-Трудингера, чтобы восстановить компактность функционала Эйлера-Лагранжа на некотором уровне. Здесь, принимая способ выбора тестовых функций, впервые возникших в [28] для оценки некоторого уровня горного перевала, мы по-прежнему имеем дело с проблемой (1.1). Мы формулируем наш результат следующим образом:

Теорема 1.3. Пусть $sp = N$, и пусть (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Допустим, что:

(H₅) $\lim_{u \rightarrow \infty} f(x, u) \exp(-\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} |u|^{\frac{N}{N-s}}) u \geq \beta > \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} / (\omega_N \mathcal{M})$, равномерно по $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, где ω_N обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, и

$$\mathcal{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} N \ln n \int_0^1 \exp \left(N t^{\frac{N}{N-s}} \ln n - t N \ln n \right) dt,$$

(H₆) Существует $C_0 > 0$ такое, что для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$F(x, t) \leq C_0 |t|^{\frac{N}{s}} + C_0 |f(x, t)|.$$

Если f удовлетворяет условию (CG), тогда проблема (1.1) имеет решение основного состояния.

Замечание 1.2. Лам и Лу [24] недавно получили нетривиальное неотрицательное решение для стандартных задач Лапласа, определенных в ограниченной области, когда нелинейный член f удовлетворяет критическому экспоненциальному росту и удовлетворяет некоторому слабому суперлинейному условию. Кроме того, для задачи N -Лапласа существует много работ, касающихся нелинейностей с критическим экспоненциальным ростом в $\mathbb{R}^N$, см., например, [29] – [31]. Однако для задачи (1.1) с $p > 2$, определенной во всем пространстве, включающем критический экспоненциальный рост, есть редкие работы, в которых рассматриваются ее основные состояния.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем некоторые предварительные знания. В разделе 3 мы доказываем некоторые полезные леммы. В Разделе 4 мы докажем нашу основную теорему.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Во-первых, мы формулируем формулу вариации для задачи (1.1). Пусть $1 \leq r \leq \infty$ и представим через $|\cdot|_r$ норму $L^r(\mathbb{R}^N)$. Пусть $0 < s < 1 < p < \infty$ и определим $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,p} < \infty\}$ со следующей нормой

$$\|u\|_{s,p} = ([u]_{s,p}^p + [u]_{s,p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Полунорма Гальярдо обозначается как

$$[u]_{s,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех измеримых функций $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Можно проверить, что $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ — равномерно выпуклое банахово пространство. Определим дробный критический показатель Соболева следующим образом:

$$p^* = \frac{Np}{N - sp}, \quad \text{если } sp < N; \quad p^* = \infty, \quad \text{если } sp = N.$$

Кроме того, дробное вложение Соболева показывает, что $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ непрерывно при $p \leq \gamma \leq p^*$, если $sp < N$, и $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ непрерывно при $p \leq \gamma < \infty$, если $sp = N$. Для общего введения в свойства $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ мы отсылаем читателя к [32].

Для удобства с этого момента мы будем писать $X = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Используя условие (V_1) , мы определяем другую норму $\|\cdot\|$ на $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ следующим образом

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in X.$$

Ясно, что новая норма $\|\cdot\|$ эквивалентна стандартной $\|u\|_{s,p}$ в X . Теперь нелинейный оператор $A : X \rightarrow X^*$ определяется для всех $u, \varphi \in X$ как

$$\begin{aligned} \langle A(u), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left[\frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp}} \right] dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2} u \varphi dx. \end{aligned}$$

Будем говорить, что функция $u \in X$ является слабым решением задачи (1.1), если

$$(2.1) \quad \langle A(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi dx$$

для любого $\varphi \in X$. Очевидно, что A является $(p-1)$ -однородным, нечетным и удовлетворяет

$$\langle A(u), u \rangle = \|u\|^p, \quad \|A(u)\|_* \leq \|u\|^{p-1}$$

для всех $u \in X$. Поскольку X равномерно выпуклое, то из предложения 1.3 [33] вытекает, что A удовлетворяет условию компактности.

Если $\{u_n\} \subset X$ такая, что $u_n \rightharpoonup u$ в X и $\langle A(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, то $u_n \rightarrow u$ в X . Из условия (SCP)(или (CG)) следует, что (2.1) является уравнением Эйлера-Лагранжа функционала

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

Напомним некоторые определения, связанные с условием компактности и версией теоремы о горном перевале.

Определение 2.1. (см. [34]) Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — действительное банахово пространство с сопряженным пространством $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ и $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$. Для $c \in \mathbb{R}$, мы говорим, что $\mathcal{J}$ удовлетворяет условию (PS)_c, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset X$ с

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c, \quad \mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{в } X^*,$$

существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ сильно сходящаяся в X .

Теперь мы формулируем теорему о горном перевале:

Утверждение 2.1. (см. [18, 34]) Пусть X — это действительное банахово пространство, и предположим, что $\mathcal{J} \in C^1(X, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$\max\{\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(u_1)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=\rho} \mathcal{J}(u),$$

для некоторых $\alpha < \beta$, $\rho > 0$ и $u_1 \in X$ с $\|u_1\| > \rho$. Пусть $c \geq \beta$ характеризуется как

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{J}(\gamma(t)),$$

где $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}$ — множество непрерывных путей, соединяющих 0 и u_1 . Тогда, существует последовательность $\{u_n\} \subset X$ такая, что

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c \geq \beta \quad \text{и} \quad \|\mathcal{J}'(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$$

3. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 3.1. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и условия (H₁)-(H₃) и (SCP) выполнены. Тогда

- (i) существуют $\rho, \alpha > 0$ такие, что $\mathcal{J}(u) \geq \alpha$ для всех $u \in X$ с $\|u\| = \rho$,
- (ii) Существует $\phi \in X$ такое, что $\mathcal{J}(t\phi) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. В силу (SCP) и (H₁)-(H₃), для любого $\epsilon > 0$, существуют $A_1^* = A_1^*(\epsilon)$, $B_1^* = B_1^*(\epsilon)$ и M^* такие, что для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$(3.1) \quad F(x, t) \leq \frac{\epsilon}{p} |t|^p + A_1^* |t|^q,$$

$$(3.2) \quad F(x, t) \geq \frac{M^*}{p} |t|^p - B_1^*.$$

Применив неравенство Соболева: $|u|_p^p \leq K_p \|u\|^p$ и $|u|_q^q \leq K_q \|u\|^q$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\epsilon}{p} |u|_p^p - A_1^* |u|_q^q \\ &\geq \frac{1}{p} (1 - K_p \epsilon) \|u\|^p - A_1^* K_q \|u\|^q, \end{aligned}$$

где K_p и K_q – положительные константы.. Значит (i) имеет место при $\epsilon < \frac{1}{K_p}$ и достаточно малом $\|u\| = \rho > 0$.

С другой стороны, выбрав ненулевую $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и применив (3.2), при достаточно большом M^* будем иметь

$$\mathcal{J}(t\phi) \leq \frac{1}{p} (1 - M^* K_p) |t|^p \|\phi\|^p + B_1^* |\text{supp } \phi| \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $|\text{supp } \phi|$ – объем $\text{supp } \phi$. Значит (ii) имеет место.

Замечание 3.1. Фактически, из (H_2) вытекает, что при $\|u\| \rightarrow 0$,

$$\langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \|u\|^p + o(\|u\|^p), \quad \mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p + o(\|u\|^p).$$

Поэтому,

(i) Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любой нетривиальной критической точки u для $\mathcal{J}$, имеет место $\|u\| \geq \rho_0$.

(ii) Для любого $c > 0$, существует $\rho_c > 0$ такое, что если $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c$, тогда $\|u_n\| \geq \rho_c$.

Лемма 3.2. Пусть $ps = N$ и допустим, что условия (H_1) – (H_3) и (SCE) (или (CG)) выполнены. Тогда:

(i) Существуют $\rho, \alpha > 0$ такие, что $\mathcal{J}(u) \geq \alpha$ для всех $u \in X$ с $\|u\| = \rho$.

(ii) Существует $\phi \in X$ такое, что $\mathcal{J}(t\phi) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. В силу (SCE) (или (CG)) и (H_1) – (H_3) , для любого $\epsilon > 0$, существуют $A_1^{**} = A_1(\epsilon)^{**}$ и достаточно большое M^{**} , а также $B_1^{**} = B_1(\epsilon)^{**}$, $\kappa > 0$ и $q_2 > \frac{N}{s}$ такие, что для всех $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$(3.3) \quad F(x, s) \leq \frac{s}{N} \epsilon |s|^{\frac{N}{s}} + A_1^{**} \Phi_{N,s} \left(\kappa |s|^{\frac{N}{N-s}} \right) |s|^{q_2},$$

$$(3.4) \quad F(x, s) \geq \frac{s M^{**}}{N} |s|^{\frac{N}{s}} - B_1^{**}.$$

Применив (3.3), неравенство Гелдера, дробное неравенство вложения Мозера-Трудингера и неравенства вложения Соболева, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &\geq \frac{s}{N} \|u\|^{\frac{N}{s}} - \frac{\epsilon}{N} |u|^{\frac{N}{s}} - A_1^{**} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\kappa |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) |u|^{q_2} dx \\ &\geq \frac{s}{N} \left(1 - \epsilon K_{\frac{N}{s}} \right) \|u\|^{\frac{N}{s}} - A_1^{**} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\kappa r \|u\|^{\frac{N}{N-s}} \left(\frac{|u|}{\|u\|} \right)^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r' q_2} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \geq \frac{s}{N} \left(1 - \epsilon K_{\frac{N}{s}} \right) \|u\|^{\frac{N}{s}} - C \|u\|^{q_2}, \end{aligned}$$

где $r > 1$ достаточно близко к 1, C – положительная константа, $\|u\| \leq \sigma$ и $\kappa r \sigma^{\frac{N}{N-s}} < \alpha_*$. Значит (i) имеет место, если $\epsilon < \frac{1}{K_{\frac{N}{s}}}$ и $\|u\| = \rho > 0$ достаточно малы.

С другой стороны, выбрав ненулевое $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и используя (3.4), мы получаем

$$\mathcal{J}(t\phi) \leq \frac{s}{N} (1 - M^{**} K_{\frac{N}{s}}) |t|^{\frac{N}{s}} \|\phi\|^{\frac{N}{s}} + B_1^{**} |\text{supp } \phi| \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $|\text{supp } \phi|$ – объем $\text{supp } \phi$ и M^{**} достаточно большое число. Таким образом, часть (ii) верна.

Замечание 3.2. На самом деле, (H_2) и (SCE) (или (CG)) подразумевают, что при $\|u\| \rightarrow 0$ мы имеем

$$\langle \mathcal{J}'(u), u \rangle = \|u\|^{\frac{N}{s}} + o(\|u\|^{\frac{N}{s}}), \quad \mathcal{J}(u) = \frac{s}{N} \|u\|^{\frac{N}{s}} + o(\|u\|^{\frac{N}{s}}).$$

Поэтому легко видеть, что

(i) Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любой нетривиальной критической точки u функции $\mathcal{J}$ выполняется $\|u\| \geq \rho_0$.

(ii) Для любого $c > 0$ существует $\rho_c > 0$ такое, что если $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c$, то $\|u_n\| \geq \rho_c$.

Лемма 3.3. Пусть $1 < p < \frac{N}{s}$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f удовлетворяет стандартному субкритическому полиномиальному росту на $\mathbb{R}^N$ (условие (SCP)), то любая $(PS)_c$ последовательность $\mathcal{J}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset X$ – последовательность $(PS)_c$ такая, что

$$(3.5) \quad \frac{\|u_n\|^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \rightarrow c,$$

$$(3.6) \quad \langle A(u_n), \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) \varphi dx = o(1) \|\varphi\|, \quad \varphi \in X.$$

Допустим противное, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ и положим

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Тогда $\{v_n\}$ ограничено. Мы можем предположить, что $\{v_n\}$ слабо сходится к v в X , локально сильно сходится в $L^p(\mathbb{R}^N)$ и сходится к v для п. в. $x \in \mathbb{R}^N$. Теперь мы покажем, что $v = 0$. Разделив обе части (3.5) на $\|u_n\|^p$, мы получим

$$(3.7) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^p} dx \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Пусть

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) \neq 0\}.$$

В силу (H_3) , имеем

$$(3.8) \quad \frac{F(x, u_n)}{|u_n|^p} |v_n|^p \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Если $|\mathcal{A}|$ положительна, то из (H_2) и (H_4) , имеем

$$F(x, t) \geq 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^p} dx \geq \int_{\mathcal{A}} \frac{F(x, u_n)}{|u_n|^p} |v_n|^p dx \rightarrow \infty,$$

что противоречит (3.7).

По условиям (V_1) , (H_1) , аналогично доказательству леммы 2.2 (ii) в [21], можно вывести, что

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |v_n|^p dx = 0.$$

В силу (3.9), применяя лемму Лионса [35, Лемма 1.1] получаем

$$(3.10) \quad v_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^\gamma(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma \in (p, p^*).$$

С другой стороны, разделив обе части (3.6) на $\|u_n\|^{p-1}$ и устремив $n \rightarrow \infty$, мы получим

$$(3.11) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx \rightarrow 0, \quad \varphi \in X.$$

Мы следуем идее доказательства леммы 3.4, появившейся в нашей предыдущей работе [26], чтобы завершить доказательство этой леммы.

Пусть

$$\mathbf{f}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Тогда с помощью (SCP) мы можем доказать, что $\{\mathbf{f}_n\}$ — семейство ограниченных линейных функционалов, определенных на X .

По (3.11) мы заключаем, что $\{\mathbf{f}_n(\varphi)\}$ ограничено для любого $\varphi \in X$. Кроме того, поскольку X является банаховым пространством, то из (см. теорему 2.2

в [36]) мы получаем, что $\{|\mathbf{f}_n|\}$ ограничено, где $|\mathbf{f}_n|$ обозначает норму $\mathbf{f}_n$. Это означает, что существует положительная константа C_1 такая, что

$$(3.12) \quad |\mathbf{f}_n| \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $X \subset L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, то (см. следствие 1.2 в [36]) существует непрерывный функционал $\hat{\mathbf{f}}_n$, определенный на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\hat{\mathbf{f}}_n$ является расширением $\mathbf{f}_n$, и

$$(3.13) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \mathbf{f}_n(\varphi), \quad \varphi \in X,$$

$$(3.14) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*} = |\mathbf{f}_n|,$$

где $\|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*}$ представляет норму $\hat{\mathbf{f}}_n(\varphi)$ в $L^{p^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$, которая определена на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$; p^{**} и q^* являются соответственно двойственными числами p и q .

По определению функционала на $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, получаем, что существует функция $S_n(x) \in L^{p^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$(3.15) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N).$$

Из (3.13) и (3.15) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X,$$

что означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(S_n(x) - \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \right) \varphi dx = 0, \quad \varphi \in X.$$

По основной лемме вариационных методов можно получить

$$S_n(x) = \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Из (3.12) и (3.14) имеем

$$(3.16) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{p^{**} \vee q^*} = \|S_n\|_{p^{**} \vee q^*} = |\mathbf{f}_n| < C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

По (3.6) и (3.11), и выбрав $\varphi = v_n - v$, мы получаем

$$(3.17) \quad \langle A(v_n), v_n - v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} v_n \rightarrow 0.$$

Применив неравенство Гелдера, (H_1) , (3.10) и (3.16) объединив доказательство теоремы А.4 в [34], мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} v_n \rightarrow 0.$$

Тогда из (3.17) вытекает, что $v_n \rightarrow v$ в X . Это приводит к противоречию, так как $\|v_n\| = 1$ и $v = 0$. Таким образом, $\{u_n\}$ ограничено в X .

Лемма 3.4. Пусть $ps = N$ и предположим, что (V_1) и (H_1) – (H_4) выполняются. Если f имеет субкритический экспоненциальный рост на $\mathbb{R}^N$ (условие (SCE)), то любая последовательность $(PS)_c \mathcal{J}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность $(PS)_c$ такая, что выполняются формулы (3.5) и (3.6). На основе предыдущего раздела доказательства леммы 3.3 мы также получаем, что выполняется формула (3.11). Положим

$$\mathbf{f}_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^{\frac{N}{s}-1}} \varphi dx, \quad \varphi \in X.$$

Тогда для любого $u \in X$, $\Phi_{N,s}(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ для всех $\alpha > 0$, можно заключить, что $\{\mathbf{f}_n\}$ — это семейство ограниченных линейных функционалов, определенных на X . Из (3.11) и теоремы резонанса, получаем, что $\{|\mathbf{f}_n|\}$ ограничено, где $|\mathbf{f}_n|$ обозначает норму $\mathbf{f}_n$. Это означает, что справедлива формула (3.12) (см. доказательство леммы 3.5).

Так как $X \subset L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$, то для некоторого $q_3 > \frac{N}{s}$, существует непрерывный функционал $\hat{\mathbf{f}}_n$, определенный на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\hat{\mathbf{f}}_n$ является расширением $\mathbf{f}_n$, и

$$(3.18) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \mathbf{f}_n(\varphi), \quad \varphi \in X,$$

$$(3.19) \quad \|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{\frac{N}{s}^{**} \vee q_3^*} = |\mathbf{f}_n|,$$

где $\|\hat{\mathbf{f}}_n\|_{\frac{N}{s}^{**} \vee q_3^*}$ представляет норму $\hat{\mathbf{f}}_n(\varphi)$ в $L^{\frac{N}{s}^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q_3^*}(\mathbb{R}^N)$, которая определена на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$; $\frac{N}{s}^{**}$ и q_3^* являются соответственно двойственными числами $\frac{N}{s}$ и q_3 .

По определению функционала на $L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N)$, получаем, что существует функция $S_n(x) \in L^{\frac{N}{s}^{**}}(\mathbb{R}^N) + L^{q_3^*}(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$(3.20) \quad \hat{\mathbf{f}}_n(\varphi) = \int_{\Omega} S_n(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in L^{\frac{N}{s}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_3}(\mathbb{R}^N).$$

Аналогично последнему разделу доказательства леммы 3.3, мы можем доказать, что $(PS)_c$ последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X .

Далее, мы заинтересованы в оценке минимаксного уровня c , введенного в предложении 2.2.

Лемма 3.5. Пусть $ps = N$ и предположим, что (H_1) , (H_2) , (H_4) и (H_5) выполняются. Тогда

$$(3.21) \quad c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}.$$

Доказательство. Чтобы получить более точную информацию об уровне минимакса c , обозначим через B единичный шар и рассмотрим следующую последовательность неотрицательных функций:

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} |\ln \epsilon|^{\frac{N-s}{N}}, & \text{если } |x| \leq \epsilon, \\ \frac{|\ln |x||}{|\ln \epsilon|^{\frac{s}{N}}}, & \text{если } \epsilon < |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Положим

$$\omega_n(x) = \frac{u_{\epsilon_n}}{\|u_{\epsilon_n}\|},$$

где $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $\|\omega_n\| = 1$, как в доказательстве леммы 3.2, имеем, что $\mathcal{J}(t\omega_n) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, существует некоторое t^* такое, что $u_1 = t^*\omega_n$ в предложении 2.1. Таким образом, имеем $c \leq \max_{t>0} \mathcal{J}(t\omega_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, достаточно показать, что $\max_{t>0} \mathcal{J}(t\omega_n) < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Допустим, что это не так. Тогда для всех n этот максимум больше или равен $\left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$. Пусть $t_n > 0$ будет таким, что

$$(3.22) \quad \mathcal{J}(t_n\omega_n) = \max\{\mathcal{J}(t\omega_n) : t \geq 0\} \geq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}.$$

Из (H₁), (H₂), (H₄) и (3.22), заключаем, что

$$(3.23) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \geq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0}\right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Кроме того, при $t = t_n$, имеем

$$t_n^{\frac{N}{s}-1} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_n\omega_n)\omega_n dx = 0,$$

что означает

$$(3.24) \quad t_n^{\frac{N}{s}} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n dx.$$

Более того, из (H₅) следует, что для данного $\epsilon > 0$ существует $R_\epsilon > 0$ такое, что

$$tf(x, t) \geq (\beta - \epsilon) \exp\left(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} |t|^{\frac{N}{N-s}}\right), \quad \forall t \geq R_\epsilon.$$

Тогда, в силу (3.24), имеем

$$\begin{aligned}
 t_n^{\frac{N}{s}} &= \int_{B_1(0)} f(x, t_n \omega_n) t_n \omega_n dx \\
 &\geq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} f(x, \frac{t_n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|} (\ln n)^{\frac{N-s}{N}}) \frac{t_n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|} (\ln n)^{\frac{N-s}{N}} dx \\
 &\geq (\beta - \epsilon) \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \exp(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}} \frac{\ln n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}}) dx \text{ (for large } n) \\
 &= (\beta - \epsilon) \omega_N (\frac{1}{n})^N \exp(\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}} \frac{\ln n}{\|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}}).
 \end{aligned}$$

Следовательно, при больших n ,

$$(3.25) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \omega_N \exp \left(\frac{\alpha_0 \frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_*} t_n^{\frac{N}{N-s}}}{N \|u_{\frac{1}{n}}\|^{\frac{N}{N-s}}} - 1 \right) N \ln n,$$

где ω_N – объем единичного шара, и $\|u_{\frac{1}{n}}\| \rightarrow (\alpha_{s,N}^*/N)^{\frac{N-s}{N}}$ (см. [22]). Теперь из (3.25), находим, что $\{t_n\}$ ограничено. Тогда, в силу (3.23), получим

$$(3.26) \quad t_n^{\frac{N}{s}} \rightarrow \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Пусть

$$A_n = \{x \in B : t_n \omega_n(x) \geq R_\epsilon\}, \quad B_n = B \setminus A_n.$$

представим интеграл в (3.24) в виде суммы двух интегралов по A_n и B_n . Аналогично доказательству (3.25), получим

$$(3.27) \quad \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \exp \left[\alpha_{s,N}^* \omega_n^{\frac{N}{N-s}} \right] dx - (\beta - \epsilon) \omega_N.$$

Последний интеграл в (3.27), обозначим через I_n и посчитаем следующим образом:

$$I_n = \left\{ \omega_N + N \omega_N \ln n \int_0^1 \exp \left(N t^{\frac{N}{N-s}} \ln n - t N \ln n \right) dt \right\}.$$

Тогда, в силу (3.27) имеем

$$\left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \geq (\beta - \epsilon) \omega_N \mathcal{M},$$

откуда вытекает, что $\beta \leq \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} / (\omega_N \mathcal{M})$. Это противоречит (H_5) .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство состоит из двух шагов.

Шаг 1. Мы утверждаем, что задача (1.1) имеет нетривиальное решение $\tilde{u}^*$. По лемме 3.1 для $c > 0$, указанного в предложении 2.1, существует последовательность $(PS)_c$ для функционала $\mathcal{J}$. Из леммы 3.3 последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X . Пусть

$$(4.1) \quad \delta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |u_n|^p dx.$$

Если $\delta^* = 0$, снова применив лемму Лиона [35],

$$u_n \rightarrow 0 \text{ в } L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma_1 \in (p, p^*).$$

Итак, из (H_1) , (H_2) и (SCP) , следует, что

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx = 0$$

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx = 0.$$

Из (3.5) и (3.6) мы знаем, что $c = 0$. Это приводит к противоречию. Следовательно, $\delta^* > 0$. По (4.1) мы можем взять $\{\tilde{z}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ такую, что

$$\int_{B_2(\tilde{z}_n)} |u_n|^p dx \geq \frac{\delta^*}{2}.$$

Можно заметить, что количество точек в $\mathbb{Z}^N \cap B_2(\tilde{z}_n)$ меньше 4^N . Итак, существует $\tilde{y}_n \in \mathbb{Z}^N \cap B_2(\tilde{z}_n)$ такая, что

$$(4.4) \quad \int_{B_2(\tilde{y}_n)} |u_n|^p dx \geq m^* > 0.$$

Положим $\tilde{u}_n = u_n(\cdot + \tilde{y}_n)$. Используя условия (V_1) и (H_1) , имеем $\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|$ и

$$(4.5) \quad \int_{B_2(0)} |\tilde{u}_n|^p dx = \int_{B_2(\tilde{y}_n)} |u_n|^p dx \geq m^* > 0.$$

Переходя к подпоследовательности, мы имеем $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}^*$ в X , $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}^*$ в $L_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^N)$; и из (4.5) имеем, что $\tilde{u}^* \neq 0$. Кроме того, по инвариантности задачи относительно трансляции $\mathbb{Z}^N$, мы выводим, что $\{\tilde{u}_n\}$ также является последовательностью $(PS)_c$ для $\mathcal{J}$. Итак, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, мы получаем $\langle \mathcal{J}'(\tilde{u}^*), \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{J}'(\tilde{u}_n), \varphi \rangle = 0$. Следовательно, $\mathcal{J}'(\tilde{u}^*) = 0$ и $\tilde{u}^*$ — нетривиальное решение (1.1).

Шаг 2. Покажем, что задача (1.1) имеет решение основного состояния. Пусть

$$(4.6) \quad m = \inf\{\mathcal{J}(u) : u \neq 0 \text{ и } \mathcal{J}'(u) = 0\}.$$

Предположим, что u — произвольная критическая точка $\mathcal{J}$. Из (H_4) имеем

$$(4.7) \quad \mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(u) - \frac{1}{p} \langle \mathcal{J}'(u), u \rangle \geq 0$$

и, таким образом, $m \geq 0$. Следовательно, $0 \leq m \leq \mathcal{J}(\tilde{u}^*) < +\infty$. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность нетривиальных критических точек $\mathcal{J}$ такая, что $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow m$. По замечанию 3.1 (i) мы знаем, что

$$(4.8) \quad \|u_n\| \geq \rho_0$$

для некоторого $\rho_0 > 0$. Поскольку u_n — критическая точка, мы также получаем

$$(1 + \|u_n\|)\|\mathcal{J}'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ является последовательностью $(PS)_c$ на уровне m . Из леммы 3.3 следует, что $\{u_n\}$ ограничено в X . Для этой последовательности $\{u_n\}$ определим δ^* , как в (4.1). Если $\delta^* = 0$, аналогично (4.3) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx = 0$$

и

$$\|u_n\|^p = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow 0.$$

Это противоречит (4.8). Следовательно, $\delta^* > 0$. Теперь, используя инвариантность задачи (1.1) относительно трансляции $\mathbb{Z}^N$, мы можем показать, что подходящий сдвиг $\{u_n\}$, обозначаемый как $\{\tilde{u}_n\}$, удовлетворяет

$$\mathcal{J}'(\tilde{u}_n) = 0, \quad \mathcal{J}(\tilde{u}_n) = \mathcal{J}(u_n) \rightarrow m,$$

и $\{\tilde{u}_n\}$ слабо сходится к некоторому $u_* \neq 0$. Более того, из (H_4) , применяя лемму Фату, можно вывести, что

$$\mathcal{J}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{J}(u_n) - \frac{1}{p} \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle \right) = m.$$

Следовательно, u_* является нетривиальной критической точкой $\mathcal{J}$ с $\mathcal{J}(u_*) = m$, и доказательство теоремы 1.1 завершено.

Доказательство теоремы 1.2. Доказательство состоит из двух шагов.

Шаг 1. Мы утверждаем, что задача (1.1) имеет нетривиальное решение $\tilde{u}^*$. По Лемме 3.2 для $c > 0$, заданной в Предложении 2.1, существует последовательность $(PS)_c$ для функционала $\mathcal{J}$. В силу леммы 3.4, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X , т. е. существует $\beta > 0$ такое, что $\|u_n\| \leq \beta$. Пусть

$$(4.9) \quad \delta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_2(y)} |u_n|^{\frac{N}{s}} dx.$$

Если $\delta^* = 0$, снова используя лемму Лионса [35],

$$(4.10) \quad u_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^\gamma(\mathbb{R}^N), \quad \forall \gamma \in \left(\frac{N}{s}, +\infty\right).$$

Поскольку f удовлетворяет субкритическому экспоненциальному росту (SCE) на $\mathbb{R}^N$, в силу (H_2) для любого $\epsilon > 0$ можно найти константу $C_\beta > 0$, которая

зависит только от β и ϵ так, что

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{\frac{N}{s}-1} + C_\beta \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2k\beta^{\frac{N}{N-s}}} |t|^{\frac{N}{N-s}} \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Таким образом, из дробного неравенства Мозера-Трудингера (см. Предложение 1.1),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \right| &\leq C_\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2\beta^{\frac{N}{N-s}}} |u_n|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k}} |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &= C_\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(\frac{\alpha_*}{2\beta^{\frac{N}{N-s}}} \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k}} |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_2 |u_n|_{k'} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $k > 1$, C_2 — положительная константа, а k' — двойственное число k . Аналогично получим, что (4.2) выполняется. Оставшееся доказательство полностью аналогично последнему разделу доказательства теоремы 1.1. Мы опускаем его.

Доказательство теоремы 1.3. Из леммы 3.2 и леммы 3.5 следует, что существует последовательность Пале-Смейла $\{u_n\}$ на уровне $0 < c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}} \frac{s}{N}$. Аналогично доказательству леммы 3.4, мы можем доказать, что $(PS)_c$ последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X . Далее, следуя доказательству теоремы 1.2, нам нужно только показать, что $\delta^* > 0$ в (4.9). Действительно, допустим противное, что $\delta^* = 0$, тогда (4.10) выполняется. Применяя (H_2) и (H_6) , аналогично доказательству предложения 5.2 в [37], мы получаем

$$(4.11) \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \rightarrow 0.$$

Тогда, в силу (4.11)

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{\frac{N}{s}} = \frac{N}{s} c < \left[\frac{\alpha_*}{\alpha_0} \right]^{\frac{N-s}{s}}.$$

Так как f имеет критический экспоненциальный рост (CG) в $\mathbb{R}^N$, то из (H_2) следует, что для любых $\epsilon > 0$, $\alpha > \alpha_0$, существует $C_3 = C_3(\epsilon, \alpha) > 0$ такое, что

$$|f(x, t)| \leq \epsilon |t|^{\frac{N}{s}-1} + C_3 \Phi_{N,s} \left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}} \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Тогда, из дробного неравенства Мозера-Трудингера (см. теорему 1.3 в [22]),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \right| &\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(k_1 \alpha |u_n|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k_1}} |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{N,s} \left(k_1 \alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{k_1}} |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \\ &\leq C_4 |u_n|_{k'_1} + \epsilon |u_n|^{\frac{N}{s}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $k_1 > 1$ достаточно близко к 1, α близко к α_0 , C_4 — положительная константа, а k'_1 — двойственное число k_1 . Таким образом,

$$\|u_n\|^{\frac{N}{s}} = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow 0.$$

Это приводит к противоречию с (4.12). Доказательство завершено.

Благодарность. Авторы благодарят рецензента за ценные замечания и предложения по улучшению этой статьи.

Abstract. We study superlinear fractional p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with periodic potential. When nonlinearities satisfy critical exponential growth (subcritical polynomial growth or subcritical exponential growth) at ∞ without satisfying the classical Ambrosetti-Rabinowitz condition, by using mountain pass theorem and Nehari manifold methods combined with the fractional Moser-Trudinger inequality, several existence results for ground state solutions are established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Laskin, “Fractional quantum mechanics”, Phys. Rev. E **62**, 31 – 35 (2000).
- [2] N. Laskin, “Fractional quantum mechanics and Levy path integrals”, Phys. Lett. A **268**, 298 – 305 (2000).
- [3] V. Ambrosio, T. Isernia, “Multiplicity and concentration results for some nonlinear Schrödinger equations with the fractional p -Laplacian”, Discrete Contin. Dyn. Syst. **38** (11), 5835 – 5881 (2018).
- [4] V. Ambrosio, “Concentrating solutions for a class of nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, Rev. Mat. Iberoam. **35**(5), 1367 – 1414 (2019).
- [5] V. Ambrosio, “Nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, Front. Elliptic Parabol. Probl. Birkhäuser/Springer, Cham, xvii+662 pp. ISBN: 978-3-030-60219-2; 978-3-030-60220-8 (2021).
- [6] V. Ambrosio, G. M. Figueiredo, T. Isernia, “Sign-changing solutions for a class of zero mass nonlocal Schrödinger equations”, Adv. Nonlinear Stud. **19**(1), 113 – 132 (2019).
- [7] V. Ambrosio, “Concentration phenomenon for a fractional Schrödinger equation with discontinuous nonlinearity”, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **16**(11), 2919 – 2944 (2023).
- [8] T. Isernia, “On a nonhomogeneous sublinear-superlinear fractional equation in $\mathbb{R}^N$ ”, Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) **10**(1), 167 – 186 (2019).
- [9] X. J. Chang, “Ground state solutions of asymptotically linear fractional Schrödinger equations”, J. Math. Phys. **54**, 061504 (2013).
- [10] X. J. Chang, Z. Q. Wang, “Ground state solutions of scalar field equations involving fractional Laplacian with general nonlinearity”, Nonlinearity **26**, 479 – 494 (2013).
- [11] P. Felmer, A. Quaas, J. Tan, “Positive solutions of nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **142**, 1237 – 1262 (2012).
- [12] G. Molica Bisci, Rădulescu, D.V.: Ground state solutions of scalar field fractional Schrödinger equations”, Calc. Var. Partial Differential Equations **54**, 2985 – 3008 (2015).
- [13] S. Secchi, “Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ ”, J. Math. Phys. **54**, 031501 (2013).
- [14] W. Zhang, J. Zhang, H. L. Mi, “On fractional Schrödinger equation with periodic and asymptotically periodic conditions”, Comput. Math. Appl. **174**, 1321 – 1332 (2017).
- [15] T. Bartsch, Z. Q. Wang, “Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$ ”, Comm. Partial Differential Equations **20**, 1725 – 1741 (1995).
- [16] V. Coti Zelati, P. H. Rabinowitz, “Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$ ”, Comm. Pure Appl. Math. **XIV**, 1217 – 1269 (1992).

- [17] P. H. Rabinowitz, “On a class of nonlinear Schrödinger equations”, *Z. Angew. Math. Phys.* **43**, 270 – 291 (1992).
- [18] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, “Dual variational methods in critical point theory and applications”, *J. Funct. Anal.* **14**, 349 – 381 (1973).
- [19] Z. L. Liu, Z. Q. Wang, “On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition”, *Adv. Nonlinear Stud.* **4**, 563 – 574 (2004).
- [20] Y. Ding, C. Lee, “Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms”, *J. Differential Equations* **222**, 137 – 163 (2006).
- [21] Y. Q. Li, Z. Q. Wang, J. Zeng, “Ground state of nonlinear Schrödinger equation with potentials”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire* **23**, 829 – 837 (2006).
- [22] C. F. Zhang, “Trudinger-Moser inequalities in fractional Sobolev-Slobodeckij spaces and multiplicity of weak solutions to the fractional-Laplacian equation”, *Adv. Nonlinear Stud.* **19**, 197 – 218 (2019).
- [23] S. B. Liu, “On ground states of superlinear p -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Math. Anal. Appl.* **361**, 48 – 58 (2010).
- [24] L. Lam, G. Z. Lu, “N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition”, *Adv. Nonlinear Stud.* **13**, 289 – 308 (2013).
- [25] Y. M. Zhang, Y. T. Shen, “Existence of solutions for elliptic equations without superquadraticity condition”, *Front. Math. China* **7**, 587 – 595 (2012).
- [26] R. C. Pei, “Fractional p -Laplacian equations with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition”, *Mediterr. J. Math.* **15**, Art. 66, 15pp (2018).
- [27] D. G. de Figueiredo, J. M. doÓ, B. Ruf, “Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **3**, 139 – 153 (1995).
- [28] H. Brezis, L. Nirenberg, “Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents”, *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 437 – 477 (1983).
- [29] Adimurthi, Y. Yang, “An interpolation of Hardy inequality and Trudinger- Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications”, *International Mathematics Research Notices* **13**, 2394 – 2426 (2010).
- [30] J. M. doÓ, E. Medeiros, U. Severo, “On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Differential Equations* **246**, 1363 – 1386 (2009).
- [31] Y. Yang, “Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space”, *J. Funct. Anal.* **262**, 1679 – 1704 (2012).
- [32] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, “Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces”, *Bull. Sci. Math.* **136**, 521 – 573 (2012).
- [33] K. Perera, R. P. Agarwal, D. O’Regan, “Morse theoretic aspects of p -Laplacian operators”, *Mathematical Surveys and Monographs* **161**, American mathematical Society, Providence, RI (2010).
- [34] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser (1996).
- [35] P. L. Lions, “The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part2”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire* **1**, 223 – 283 (1984).
- [36] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (2011).
- [37] L. Lam, G. Z. Lu, “Existence and multiplicity of solutions to equations of N -Laplacian type with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$ ”, *J. Funct. Anal.* **262**, 1132 – 1165 (2012).

Поступила 14 августа 2024

После доработки 04 декабря 2024

Принята к публикации 06 декабря 2024