Известия НАН Армении, Математика, том 60, н. 3, 2025, стр. 24 – 34.

КРИТЕРИИ СТРОГО И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско-Армянский университет, Армения[1]
Институт математики Национальной академии наук Армении
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com; haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Найдены условия строгой гипоэллиптичности и почти гипоэллиптичности для одного класса линейных дифференциальных операторов. Условия даны в терминах элементарных центральных линий символов (характеристических многочленов), соответствующих этим операторам.

MSC2020 numbers: 12E10; 35H10; 35E20.

Ключевые слова: строго (почти) гипоэллиптический оператор (полином); линейное преобразование переменных; элементарная центральная линия.

1. Введение и предварительные факты

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех $n-$мерных мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ $(j = 1, ..., n)$, $\mathbb{R}^n$ - $n-$мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ $\mathbb{C}^n := \mathbb{R}^n \times i\,\mathbb{R}^n$, $(i^2 = -1)$.

Для $\xi \in C^n$, обозначим $||\xi|| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$, а для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ $(j = 1, \cdots, n)$.

Пусть $P(D) = P(D_1, ..., D_n) := \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ - его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Мы также обозначим через $m = m(P) = degP := \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|-$ степень многочлена P, $\mathfrak{D}(P) := \{\zeta \in C^n, P(\zeta) = 0\}$, $d_P(\xi) := \inf_{\zeta \in \mathfrak{D}(P)} ||\xi - \zeta||$ и представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=m-j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.1}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитетом по высшему образованию и науке в рамках научного проекта № 25PG-1A205.

Для однородного многочлена $R(\xi)=\sum_{|\alpha|=r}\gamma_\alpha\,\xi^\alpha$ степени r обозначим $\Sigma(R)=\{\tau\in\mathbb{R}^n; ||\tau||=1, R(\tau)=0\}$, а для точки $\tau\in\Sigma(R)$ обозначим через $l=l_R(\tau)$ кратность корня τ, который определяется из условия $\sum\limits_{|\alpha|<l}|R^{(\alpha)}(\tau)|:=\sum\limits_{|\alpha|<l}|D^\alpha R(\tau)|=0$, $\sum\limits_{|\alpha|=l}|D^\alpha R(\tau)|\neq 0$, где $l-$ натуральное число.

Лемма 1.1. *Пусть R однородный многочлен порядка r, $\tau^1,\tau^2\in\Sigma(R)$ и $l_R(\tau^1)=l_R(\tau^2)=r$. Тогда $R(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)=0$ для любых действительных чисел t_1 и t_2, при этом $l_R(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)=r$.*

Прежде чем доказать лемму, отметим следующее: легко видеть, что однородный многочлен $R(\xi)=R(\xi_1,...,\xi_n)$ может иметь не более $n-1$ линейно независимых корней кратности r.

Доказательство леммы. Так как для любого мультииндекса $\beta\in\mathbb{N}_0^n:|\beta|\leq r$

$$R^{(\beta)}(\xi)=\sum_{\alpha\in(R),\alpha\geq\beta}\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\gamma_\alpha\,\xi^{\alpha-\beta}=\sum_{|\delta|=r-|\beta|,\ \delta+\beta\in(R)}\frac{(\delta+\beta)!}{\delta!}\gamma_{\delta+\beta}\,\xi^\delta,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

По формуле Тейлора, в силу однородности многочленов $R^{(\beta)};\beta\in\mathbb{N}_0^n$, для всех $t_1,t_2\in\mathbb{R}^1$, $\beta\in\mathbb{N}_0^n:|\beta|<r$ имеем

$$R^{(\beta)}(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)=\sum_\delta\frac{1}{\delta!}\,R^{(\beta+\delta)}(t_1\,\tau^1)(t_2\,\tau^2)^\delta$$

$$=\sum_{|\delta|=r-|\beta|,\ \delta+\beta\in(R)}\frac{(\delta+\beta)!}{\delta!}\gamma_{\delta+\beta}\,(t_2\,\tau^2)^\delta=R^{(\beta)}(t_2\,\tau^2)=t_2^{r-|\beta|}R^{(\beta)}(\tau^2)=0.$$

Отсюда следует, что $R(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)=0$ и $l_R(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)\geq r$.

Пусть $\beta^0\in(R)$. Тогда, очевидно, $R^{(\beta^0)}(\xi)=\beta^0!\ \gamma_{\beta^0}\neq 0$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$. Следовательно $l_R(t_1\,\tau^1+t_2\,\tau^2)=r$ для любых действительных чисел t_1 и t_2. □

Замечание 1.1. *Используя математическую индукцию, легко получить аналог леммы 1.1 для точек $\tau^1,\tau^2,...,\tau^k\in\Sigma(R)$ для любого $k\geq 2$ если $l_R(\tau^j)=r$ $(j=1,...,k)$.*

Определение 1.1. *Множество $F\subset\mathbb{R}^n$ размерности k $(0<k\leq n-1)$ назовем элементарным множеством многочлена P, если существует постоянное σ такое, что $P(\xi)=\sigma$ для всех $\xi\in F$. Если $\sigma=0$, то множество F назовем тривиальным элементарным множеством многочлена P (сокращенно — тривиальным множеством P).*

Из леммы 1.1 (см. также замечание 1.1) немедленно следует

Следствие 1.1. *Пусть R однородный многочлен степени r, $k \geq 2$, $\tau^1, ..., \tau^k \in \Sigma(R)$ и $l_R(\tau^j) = r$ $(j = 1, ..., k)$. Тогда линейная оболочка векторов $\{\tau^1, ..., \tau^k\}$ — тривиальное множество многочлена R.*

Предложение 1.1. *Пусть P — многочлен с постоянными коэффициентами, $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное обратимое отображение $Q(\eta) := P(T\eta), \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда* 1) $degQ = degP$, *2) если $P(\tau) = 0$, $(\tau \in \mathbb{R}^n)$, то $l_Q(T^{-1}\tau) = l_P(\tau)$.*

Доказательство первого утверждения очевидно. Второй пункт непосредственно следует из следующей легко проверяемой оценки: существует число $c > 1$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}_0$ выполняется следующее неравенство:

$$c^{-1} \sum_{|\alpha|=l} |Q^{(\alpha)}(\eta)| \leq \sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(T\eta)| \leq c \sum_{|\alpha|=l} |Q^{(\alpha)}(\eta)| \;\; \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Лемма 1.2. *Пусть R - ненулевой однородный многочлен степени r, $k \geq 2$, векторы $\tau^1, ..., \tau^k \in \Sigma(R)$ линейно независимы и $l_R(\tau^j) = r$ $(j = 1, ..., k)$. Если $R(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{\tau^1, ..., \tau^k\}$, то существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что 1) многочлен $Q(\eta) := R(T\eta)$ является однородным степени r, 2) $Q(\eta) \equiv Q(\eta_1, ..., \eta_{n-k}, 0, ..., 0)$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$, 3) $Q(\eta) \neq 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta_1| + ... + |\eta_{n-k}| \neq 0$, т.е. многочлен $Q(\eta)$, рассматриваемый как многочлен от переменных $\eta_1, ..., \eta_{n-k}$, является однородным эллиптическим многочленом на $\mathbb{R}^{n-k}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Без потери общности можно считать, что векторы $\tau^1, ..., \tau^k$ взаимно ортогональны. Дополняем набор векторов $\{\tau^j\}_1^k$ до ортонормированного базиса $\{\theta^1, ..., \theta^{n-k}, \tau^1, ..., \tau^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ (обратите внимание, что лемма подразумевает, что $k < n$).

Обозначим через T следующую матрицу $T = (\theta^1, ..., \theta^{n-k}, \tau^1, ..., \tau^k)$, а через $\{e^j\}_1^n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, где $e_i^j = 1$ если $i = j$ и $e_i^j = 0$ если $i \neq j$. Очевидно, что T является обратимой матрицей, причем $Te^j = \theta^j$ $j = 1, ..., n-k$ и $Te^j = \tau^{j-n+k}$ $j = n-k+1, ..., n$.

Представим $r-$однородный многочлен Q (см. утверждение 1) в виде

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{r} \eta_n^j \; [\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta| = r-j} \delta_{(\beta,j)} \, \eta_1^{\beta_1} ... \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}}], \tag{1.3}$$

где числа $\{\delta_{(\beta,j)}\}$ однозначно определяются коэффициентами многочлена P.

Согласно предложению 1.1 имеем $l_Q(e^n) = l_R(\tau^k) > 0$, $0 = Q(e^n) = \delta_{0,...,0,r}$. Применяя метод индукции по убыванию $j : j \leq r$, покажем, что $\delta_{(\beta,j)} = 0$ для любых пар (β, j) таких, что $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| + j = r$. Пусть $\delta_{(\beta,j)} = 0$ для пары (β, j) : так, что $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| + j = r$, $j \geq p \geq 2$. Покажем, что $\delta_{(\beta,p-1)} = 0$. По предположению индукции многочлен Q представляется в виде

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{p-1} \eta_n^j \, [\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta| = r-j} \delta_{(\beta,j)} \, \eta_1^{\beta_1} ... \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}}].$$

Так как (в условиях этой леммы), по Предложению 1.1 $l_Q(e^n) = l_R(\tau^k) = r$, и при $p \geq 2$, $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $|\beta| = r - p + 1$ (т.е. $|\beta| < r$), то $0 = Q^{(\beta)}(e^n) = \beta! \, \delta_{(\beta,p-1)}$. Следовательно, $\delta_{(\beta,p-1)} = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}, |\beta| = r - p + 1$. Отсюда согласно индукции получим, что многочлен $Q(\eta)$ можно представить в виде

$$Q(\eta) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}; |\beta| = r} \delta_{(\beta,0)} \, \eta_1^{\beta_1} ... \eta_{n-1}^{\beta_{n-1}} = Q(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, 0).$$

Проводя аналогичные рассуждения и принимая во внимание тот факт, что $l_Q(e^j) = l_R(\tau^{j-n+k})$ $(j = n-1, ..., n-k+1)$, получаем утверждение части 2) леммы.

Докажем утверждение 3). Предположим противное, что при условии леммы существует точка $\eta^0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ такая, что $|\eta_1^0| + ... + |\eta_{n-k}^0| \neq 0$ и $Q(\eta^0, 0, ..., 0) = 0$. Обозначим $\tilde{\eta}^0 = (\eta_1^0, ..., \eta_{n-k}^0, 0, ..., 0)$. Так как вектор $\tilde{\eta}^0$ ортогонален векторам $e^{n-k+1}, ..., e^n$, , то $T\tilde{\eta}^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\tau^1, ..., \tau^k\}$. Но $R(T\tilde{\eta}^0) = Q(\tilde{\eta}^0) = 0$. Это противоречит условию леммы и доказывает часть 3). Лемма 1.3 доказана. $\square$

Нам также необходимо следующее легко проверяемое утверждение:

Лемма 1.3. *Пусть $\alpha^1, ..., \alpha^K$ — вершины многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P степени $m(P)$. Тогда существуют постоянные $0 < C_1 \leq C_2$ такие, что*

$$|P(\xi)| \leq C_1 \, [1 + \sum_{k=1}^{K} |\xi^{\alpha^k}|] \leq C_2 \, [1 + ||\xi||^{m(P)}] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. Условия строгой гипоэлиптичности и почти гипоэллиптичности

Для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ обозначим через $d_P(\xi)$ расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta; \zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}$. В [3, Лемма 11.1.4] доказано, что существует константа $C = C(n,m) > 0$ такая, что для любого многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ степени не более m, справедлива следующая оценка:

$$C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ P(\xi) \neq 0. \tag{2.1}$$

Поскольку, очевидно, что $d_P(\xi) = 0$, при $P(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R}^n$, то из неравенства (2.1) следует, что с некоторой константой $C_1 > 0$ справедливо неравенство

$$d_P(\xi) \leq C_1 \, |P(\xi)|^{1/m(P)} \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. *(см. [3], Определение 11.1.2 и Теорема 11.1.3). Многочлен P называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) $d_P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$, 2) существуют положительные постоянные δ и c такие, что*

$$1 + d_P(\xi) \geq c\,||\xi||^\delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *1) Из оценки (2.3) немедленно следует, что если многочлен P гипоэллиптичный, то число δ из (2.3) принадлежит множеству $(0, 1]$, 2) существуют числа $\delta \in (0, 1]$, $c > 0$, и $M > 0$ такие, что*

$$d_P(\xi) \geq c\,|P(\xi)|^{\delta/m(P)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \ \ ||\xi|| \geq M. \tag{2.4$'$}$$

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только второй пункт. По определению гипоэллиптичности P (см. первый пункт Определения 2.1) существуют положительные числа M_0, C и δ такие, что $d_P(\xi) \geq C\,||\xi||^\delta$ для $||\xi|| \geq M_0$. С другой стороны, из леммы 1.3 следует существование положительных констант C_1 и C_2 таких, что для $|P(\xi)| \leq C_1\,[1+||\xi||\,]^{m(P)} \leq C_2\,||\xi||^{m(P)}$ если $||\xi|| \geq 1$. Предполагая, что $M \geq max\{M_0, 1\}$, при $||\xi|| \geq M$ имеем

$$d_P(\xi) \geq C\,||\xi||^\delta = C\,[||\xi||]^{m(P)}]^{\delta/m(P)}$$

$$\geq C\,[|P(\xi)|/C_2]^{\delta/m(P)} = C_3\,|P(\xi)|^{\delta/m(P)}.$$

Определение 2.2. *(см. [2]) Многочлен P называется почти гипоэллиптическим, если для некоторой константы $C > 0$ $\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C\,[|P(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.*

Лемма 2.1. *Пусть многочлен P степени $m = m(P)$ представлен в виде (1.1) и существуют числа $C > 0$ и $M > 0$ такие, что*

$$d_P(\xi) \geq C\,|P(\xi)|^{1/m(P)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ ||\xi|| \geq M. \tag{2.4}$$

Тогда $l_{P_m}(\tau) = m(P)$ для всех $\tau \in \Sigma(P_m)$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \Sigma(P_m)$ — любая фиксированная точка. Легко проверить, что для любого $s \in \mathbb{N} : s \geq M + 1$ найдется точка $\eta^s \in \mathbb{R}^n : |\eta^s| \leq 1$ такая, что $P(\xi^s) := P(s\,\tau+\eta^s) \neq 0$. Тогда, по условию леммы и на основании оценки (2.1), найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для всех натуральных чисел $k : k \leq m(P)$ и для всех $s \geq M + 1$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=k} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \leq C_1\,|P(\xi^s)|^{1-k/m(P)}. \tag{2.5}$$

Представляя многочлен P в виде (1.1), и применяя формулу Тейлора, для левой части неравенства (2.5) при $s \geq M+1$, когда $k = l_{P_m}(\tau)$, имеем

$$\sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \geq \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} [|P_m^{(\alpha)}(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{m} |P_{m-j}^{(\alpha)}(\xi^s)|]$$

$$= \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} \left[\left|\sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} |P_m^{(\alpha+\beta)}(s\,\tau)\,(\eta^s)^{\beta}| - \sum_{j=1}^{m} |P_{m-j}^{(\alpha)}(s\,\tau+\eta^s)\right|\right]$$

$$\geq \sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} \left[\left|P_m^{(\alpha)}(s\,\tau)| - \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{\beta!} |P_m^{(\alpha+\beta)}(s\,\tau)\,(\eta^s)^{\beta}| \;-\; \sum_{j=1}^{m} |P_{m-j}^{(\alpha)}(s\,\tau+\eta^s)\right|\right].$$

Так как кратность нуля многочлена P_m в точке τ равна $l_{P_m}(\tau)$, то степень многочленов $P_m^{(\alpha+\beta)}$ и $P_{m-j}^{(\alpha)}$ $(j = 1, ..., m)$ для $|\alpha| = l_{P_m}(\tau)$, $\beta \neq 0$ не превышает число $m - l_{P_m}(\tau) - 1$. Следовательно, при некоторых положительных константах C_2 и C_3 для любого $s \geq M+1$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=l_{P_m}(\tau)} |P^{(\alpha)}(\xi^s)| \geq C_2\, s^{m-l_{P_m}(\tau)} - C_3\, s^{m-l_{P_m}(\tau)-1}. \tag{2.6}$$

Теперь оценим многочлен P. Снова применяя формулу Тейлора с некоторой константой $C_4 > 0$, для любого $s \geq M+1$ получим

$$|P(\xi^s)| \leq |P_m(\xi^s)| + \sum_{j=1}^{m} |P_{m-j}(\xi^s)| = |\sum_{|\alpha|\geq l_{P_m}(\tau)} \frac{1}{\alpha!}\, P_m^{(\alpha)}(s\,\tau)\,(\eta^s)^{\alpha}|$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |P_{m-j}(s\,\tau+\eta^s)| \leq C_4\, s^{m-1}.$$

Отсюда и из оценки (2.6) в силу (2.5), имеем

$$C_2\, s^{m-l_{P_m}(\tau)} - C_3\, s^{m-l_{P_m}(\tau)-1} \leq C_5\, s^{\frac{m-1}{m}\,[m-l_{P_m}(\tau)]}.$$

Откуда следует, что $m - l_{P_m}(\tau) \leq \frac{m-1}{m}\,[m - l_{P_m}(\tau)]$. Так как $1 \leq l_{P_m}(\tau) \leq m$ последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $l_{P_m}(\tau) = m$. Что и доказывает лемму. □

Следствие 2.1. *Пусть многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и натуральное число $k : k \leq n$ такое, что если многочлен $Q(\eta) := P(T\eta)$ представить в виде (1.1), то 1) $m(Q) = m(P)$, 2) $Q_{m(Q)}(\eta) = Q_{m(Q)}(\eta_1, ..., \eta_k, 0, ..., 0)$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$, 3) многочлен $Q_{m(Q)}$, рассматриваемый в R^k, является эллиптическим.*

Доказательство следует непосредственно из леммы 2.1.

Определение 2.3. *Гипоэллиптические многочлены, удовлетворяющие неравенству (2.4') при* $\delta = 1$ *называются* ***строго гипоэллиптическими*** *(см. [3] [4]).*

Легко проверить, что такими являются, например, эллиптические многочлены. М. Лангенбрух в [6] доказал гипотезу Комуры - Зилезни (см. [5], [8]) о том, что если неэллиптический дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, ..., D_n)$ является строго гипоэллиптическим, то функциональная размерность множества $\{u \in C(\Omega), P(D)u = 0\}$ больше, чем n.

Предложение 2.1. *Пусть многочлен* P *удовлетворяет условию* $(2.4')$*, а* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейное обратимое отображение. Тогда многочлен* $Q(\eta) := P(T\eta)$ *также удовлетворяет условию* $(2.4')$ *с некоторыми константами* $C = C(Q) > 0$ *и* $M = M(Q) > 0$.

Доказательство. Так как при условиях предположения $||T\eta|| \to \infty$ тогда и только тогда, когда $||\eta|| \to \infty$, то утверждения предположения непосредственно следует из оценки (1.2).

Пусть $\delta \in [0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{A}_\delta(n)$ множество многочленов $\{P\}$, удовлетворяющих условию $(2.4')$.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$ и $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^6 + \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^2 + 1$. Тогда $m(P) = m_0(P) = 6$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$, $P_6(\xi) = \xi_1^6$, $P_4(\xi) = \xi_1^2\xi_2^2$, $P_2(\xi) = \xi_2^2$, $P_0(\xi) = 1$.

Легко видеть, что многочлен P почти гипоэллиптичный и $P \in \mathcal{A}_0(2)$.

Пример 2.2. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2$. Здесь $m(P) = 4$. Покажем, что $P \in \mathcal{A}_1(2)$, т. е. существуют положительные константы C_1, M_1 такие, что $d_P(\xi) \geq C_1 P^{1/4}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^2, ||\xi|| \geq M_1$. В силу леммы 11.1.4 из монографии [3] достаточно показать существование положительных констант C_1, M_1 таких, что

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} |\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}|^{1/|\alpha|} \leq C_1 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^2, ||\xi|| \geq M_1. \tag{2.7}$$

Так как $|\xi_2^{2-j}|/(\xi_1^4 + \xi_2^2)^{1-j/4} \leq 1$ $j = 1, 2$ то простые вычисления при $||\xi|| \geq 2$, показывают, что

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{j=1}^{2} |\frac{D_2^j P(\xi)}{P(\xi)}|^{1/j} \leq \sum_{j=1}^{2} [\frac{2!}{(2-j)!}]^{1/j} := \kappa_1. \tag{2.8}$$

Так как $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv 0$ при $\alpha_1 > 4$, $\alpha_2 > 2$, $\alpha_1\alpha_2 > 0$ и

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{j=1}^{4} \left|\frac{D_1^j P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/j} = \sum_{j=1}^{4} \left|\frac{\frac{4!}{(4-j)!}\xi_1^{4-j}}{(\xi_1^4 + \xi_2^2)^{1-j/4}}\right|^{1/j} \leq \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{4!}{(4-j)!}\right)^{1/j} := \kappa_2,$$

то отсюда и из (2.8) получаем оценку (2.7) для $C_1 = \kappa_1 + \kappa_2$ и $M_1 = 2$, т.е. многочлен P является строго гипоэллиптическим.

Можно доказать больше, а именно, что этот многочлен удовлетворяет оценке

$$C_2^{-1}\, d_P(\xi) \le P^{1/4}(\xi) \le C_2\, d_P(\xi)$$

для любого $C_2 > 0$. Действительно, так как для $||\xi|| \ge 2$

$$P^{1/4}(\xi) \sum_{\alpha \ne 0} |\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}|^{1/|\alpha|} \ge P^{1/4}(\xi)\ |\frac{D_1^4 P(\xi)}{P(\xi)}|^{1/4} = |D_1^4 P(\xi)|^{1/4} = (4!)^{1/4}.$$

Отсюда и из оценки (2.8) в силу указанной выше леммы получаем требуемую оценку.

Лемма 2.2. *Пусть $\delta \in [0,1]$ и $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$. Тогда многочлен P почти гипоэллиптичный.*

Доказательство. В условиях леммы, по определению множества $\mathcal{A}_\delta(n)$ и правой части неравенства (2.1), для любого натурального числа $l : l \le m(P)$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(\xi)| \le C\, |P(\xi)|^{1-\frac{l\,\delta}{m(P)}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n :\ ||\xi|| \ge M(P),\ P(\xi) \ne 0.$$

Отсюда, в силу непрерывности многочленов, получаем то же неравенство для тех точек $\xi \in \mathbb{R}^n$, $||\xi|| \ge M(P)$, для которых $P(\xi) = 0$.

Используя арифметическое неравенство $|t|^\varepsilon \le |t|+1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \in [0,1]$, и принимая во внимание, что многочлены $\{P^{(\alpha)}; |\alpha| = l\}$ ограничены при $||\xi|| \le M(P)$ и их число конечно, отсюда с некоторой постоянной $C_1 > 0$ получим $\sum_{|\alpha|=l} |P^{(\alpha)}(\xi)| \le C_1\, [\, |P(\xi)| + 1\,]\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, что доказывает лемму. □

Далее, будем говорить, что а) многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ по существу зависит от переменных $\xi_1, ..., \xi_n$, если для любого линейного обратимого преобразования T : $\xi = T\eta$ пространства $\mathbb{R}^n$, многочлен $Q(\eta) = P(T\eta)$ зависит от переменных $\eta_1, ..., \eta_n$. Или, что то же самое, выражение $\prod_{j=1}^n D_j Q(\eta)$ отличается от тождественного нуля, б) $P \in \mathbb{I}_n$, если $|P(\xi)| \to \infty$ для $||\xi|| \to \infty$.

Например, очевидно, что для любого $m > 1$ многочлен $P_1(\xi) = P_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^{2m} + \xi_2^{2m} + \xi_1^2 + \xi_2^2$ от двух переменных существенно зависит от переменных ξ_1, ξ_2, а многочлен $P_2(\xi) = P_2(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)^{2m} + (\xi_1 + \xi_2)^2$, не существенно зависит от переменных ξ_1, ξ_2, так как при замене переменных $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, P переходит в многочлен $Q(\eta) = \eta_1^{2m} + \eta_1^2$, который не зависит от переменной η_2. В этом случае $P_1 \in \mathbb{I}_n$, $P_2 \notin \mathbb{I}_n$.

Теорема 2.1. *а) Если $P \in \mathbb{I}_n$, то P существенно зависит от переменных $\xi_1, ..., \xi_n$, б) если $P \in \mathcal{A}_\delta(n), \delta \in [0,1]$, то для этого также необходимо условие $P \in \mathbb{I}_n$.*

Доказательство. Пункт а) Предположим обратное, что для многочлена $P \in \mathbb{I}_n$ существует линейное обратимое преобразование $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для которого $Q(\eta) := P(T\eta)$ не зависит (например) от η_n, т. е. $Q(\eta) = Q(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, 0)$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда $P[T(0', s)] = Q(0', s) = Q(0)$ для всех $s = 1, 2, ...\cdot$ Так как $||(0', s)|| = s \to \infty$ при $s \to \infty$, то это противоречит условию $P \in \mathbb{I}_n$ теоремы и доказывает пункт а).

Пункт б). В [4, лемма 3.1] доказано, что если почти гипоэллиптический многочлен R существенно зависит от своих переменных, тогда $R \in \mathbb{I}_n$. Так как любой многочлен $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$, $\delta \in [0, 1]$ по лемме 2.2 является почти гипоэллиптическим, то согласно вышеизложеннму, $P \in \mathbb{I}_n$, если P существенно зависит от своих переменных. □

Определение 2.4. *Прямую в $\mathbb{R}^n$, проходящую через начало координат, будем называть центральной.*

Теорема 2.2. *Пусть многочлен P удовлетворяет условию $(2.4')$ для некоторых чисел $\delta \in (0, 1]$, $C > 0$ и $M > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны: а) P является гипоэллиптическим, б) P существенно зависит от своих переменных $\xi_1, ..., \xi_n$, в) центральные линии в $\mathbb{R}^n$ не могут быть элементарными для многочлена P.*

Доказательство. Докажем, что a) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ a). Пусть P гипоэллиптичен в $\mathbb{R}^n$. Тогда $P \in \mathbb{I}_n$. Следовательно, очевидно, что центральные прямые в $\mathbb{R}^n$ не могут быть элементарными для многочлена P, то есть a) $\Longrightarrow$ c).

Покажем, что из c) следует b). Пусть, наоборот, существует многочлен P, не имеющий элементарной центральной линии в $\mathbb{R}^n$, но который существенно не зависит от переменных $\xi_1, ..., \xi_n$. Тогда существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\prod_{j=1}^n D_j Q(\eta) \equiv 0$, где $Q(\eta) := P(T\eta)$. Так как нули конечного числа ненулевых многочленов не могут покрыть все пространство, то отсюда следует, что для некоторого индекса $j : 1 \leq j \leq n$ (пусть, для определенности, $j = n$), где $D_n Q(\eta) \equiv 0$. Тогда $Q(\eta) = Q(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, 0)$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, что линия $\{t\, e^n : t \in \mathbb{R}^1, e^n = (0, 0, ..., 1)\}$ является центральной в $\mathbb{R}^n$, при этом $Q(t\, e^n) = Q(0)$. Поскольку $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное обратимое отображение, то $\theta := T\, e^n \neq 0$.

Рассмотрим многочлен P на центральной прямой $\{t\,\theta : t \in \mathbb{R}^1\}$. По определению отображения T, имеем $P(t\,\eta) = P(t\,[Te^n]) = P(T[t\, e^n]) = Q(t\, e^n) = Q(0)$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что центральная прямая $\{t\,\theta : t \in \mathbb{R}^1\}$ является элементарной для многочлена P. Мы получили противоречие, которое доказывает, что c) следует из b).

Наконец, покажем, что из b) следует a). Согласно следствию 2.1 и предложению 2.1 существует линейное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q(\eta) := P(T\eta)$ принадлежит множеству $\mathcal{A}_\delta(n)$, для $\delta \in (0,1]$. Из условия существенной зависимости от $\xi_1, ..., \xi_n$, многочлена P имеем, что Q существенно зависит от $\eta_1, ..., \eta_n$, . Тогда, по теореме 2.1 получим, что $Q \in \mathbb{I}_n$. Следовательно, в силу обратимости отображения T, $P \in \mathbb{I}_n$. Так как многочлен P удовлетворяет условию (2.4′), то $d_P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$, т. е. многочлен P гипоэллптичен. □

Следствие 2.2. *Пусть при условиях теоремы 2.2* $\delta = 1$. *Многочлен P строго гипоэллптичен тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) P существенно зависит от своих переменных $\xi_1, ..., \xi_n$, 2) никакая центральная линия в $\mathbb{R}^n$ не является элементарной для P.*

Пример 2.3. Пусть $n = 3$, $P(\xi) = (\xi_1-\xi_2-\xi_3)^6+\xi_2^2+\xi_3^2$. Здесь $m(P) = 6$. Покажем, что этот многочлен является строго гипоэллиптическим, т. е. существует положительное число C такое, что $d_P(\xi) \geq C\, P(\xi)^{1/6}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^3$, $||\xi|| \geq 3$. По лемме 11.1.4 из монографии [3] достаточно показать существование положительных чисел C_1 и M таких, что

$$Q(\xi) := P^{1/6}(\xi) \sum_{\alpha\neq 0} |\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}|^{1/|\alpha|} \leq C_1 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^3, ||\xi|| \geq 3. \tag{2.9}$$

Так как для $||\xi|| \geq 3$, либо $|\xi_2| \geq 1$, либо $|\xi_3| \geq 1$, либо $|\xi_1 - \xi_2 - \xi_3| \geq 1$, то простые вычисления показывают, что

$$P^{1/6}(\xi) \sum_{j=1}^{2} [\frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{P(\xi)}]^{1/j} = \sum_{j=1}^{2} [\frac{|\xi_2|^{2-j} + |\xi_3|^{2-j}}{P(\xi)^{1-j/6}}]^{1/j} \leq \sum_{j=1}^{2} 2^{1/j} \tag{2.10}$$

С другой стороны, для некоторой константы $C_2 > 0$ имеем

$$Q(\xi) = \sum_{\alpha\neq 0} \left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)^{1-|\alpha|/6}}\right|^{1/|\alpha|} \leq$$

$$\leq C_2\, [\sum_{|\alpha|=1}^{6} \frac{(\xi_1-\xi_2-\xi_3)^{6-|\alpha|}}{[(\xi_1-\xi_2-\xi_3)^{6-|\alpha|}+\xi_2^2+\xi_3^2]^{1-|\alpha|/6}}^{1/|\alpha|} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{|\xi_2|^{2-j}+|\xi_3|^{2-j}}{[(\xi_1-\xi_2-\xi_3)^6+\xi_2^2+\xi_3^2]^{1-j/6}}]^{1/j} \leq$$

$$\leq C_2 \left[\sum_{|\alpha|=1}^{6} 1 + \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{|\xi_2|^{2-j}+|\xi_3|^{2-j}}{[(\xi_1-\xi_2-\xi_3)^6+\xi_2^2+\xi_3^2]^{1-j/6}}\right|^{1/j}\right].$$

Отсюда и из (2.10) для $||\xi|| \geq 3$ имеем, что $Q(\xi) \leq C_2[\sum_{|\alpha|=1}^{6} 1 + \sum_{j=1}^{2} 2^{1/j}] := \kappa$, откуда, в свою очередь, следует оценка (2.9) для $C_1 = \kappa$.

Пример 2.4. Применяя результаты [7], простые вычисления показывают, что многочлен $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^6 + \xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_2^6$ принадлежит $\mathcal{A}_{2/3}(2)$.

Abstract. Conditions for strictly hypoelliptisity and almost hypoelliptisity are found for a class of linear differential operators. Conditions are given in terms of elementary center lines of symbols (characteristic polynomials) corresponding to these operators.

Список литературы

[1] L. H$\ddot{o}$rmander, The Analysis of linear Partial Differential Operators 2, Springer-Verlag (1983).
[2] G. G. Ghazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Dokl. Ross. Acad. Nauk, **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
[3] G. G. Kazaryan, "Strictly hypoelliptic operators with constant coefficients", Math. USSR Sb., **183**(2), 121 – 133 (1992).
[4] M. Langenbruch, "On the functional dimension of solutions spaces of hypoelliptic PDE", Math. Ann., **272**, 217 – 229 (1985).
[5] Y. Komura, "Die Nukli$\ddot{a}$ritet der L$\ddot{o}$sungsr$\ddot{a}$ume der Hypoelliptischen Gleichungen", Funcialaj Ekvacioj, **9**, 313 – 324 (1966).
[6] Z. Zilezny, "On the functional dimension of the space of solution of PDE", J. Differential Equations, **18**, 340 – 345 (1975).
[7] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On increase at infinity of almost hypoelliptic polynomials", Eurasian Math. Journal, **4**, no.4, 30 – 42 (2013).
[8] V. N. Margaryan, G. O. Hakobyan, "On the weight of hypoellipticity of polynomials", Inter - university collection of scientific works, no. 4, 108 – 122 (1986).

Поступила 18 сентября 2024
После доработки 20 декабря 2024
Принята к публикации 12 февраля 2025