

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОРТФЕЛИ: БАЙЕСОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. КЕЧЕДЖЯН, В. К. ОГАНЯН, В. БАРДАХЧЯН

*Фрипоинт Комодитис, Стамфорд, Коннектикут, США
Ереванский государственный университет¹*

E-mails: *hkechejian@hotmail.com ; victoohanyan@ysu.am;
vardan.bardakchyan@ysu.am*

Аннотация. Универсальный портфель — рекурсивно конструируемая модель, предложенная Кавером. Несмотря на то, что изначально предложенный портфель разнится с наилучшим постоянно ребалансируемым портфелем, в конечном итоге средние доходности портфелей приблизительно одинаковы. Главная проблема с универсальными портфелями заключается в требуемой вычислительной мощности. Мы предлагаем другой взгляд на конструкцию портфеля. Мы утверждаем, что специально выбранного байесовского процесса может быть достаточно для сходимости к тем же результатам. Мы показываем, как эмпирически, так и теоретически, что байесовский процесс обновления, независимо от конкретного распределения процессов цен акций, будет воспроизводить то же поведение, что и универсальный портфель. Мы также показываем эмпирически, что универсальные портфели с ограничениями также могут обрабатываться этим механизмом.

MSC2020 numbers: 60J65; 65C30; 60H35; 97M30; 91B24.

Ключевые слова: универсальный портфель; распределение Дирихле; Байесовский вывод.

1. Введение

Теория универсальных портфелей была разработана Т. Кавером в [1]. Идея универсальных портфелей возникла из желания максимально приблизиться к лучшему постоянно ребалансированному (т. е. сохраняющему начальные веса) портфелю для любой заданной группы активов. Для получения последнего не существует известных механизмов, и пока мы предполагаем, что детерминистический сценарий невозможен.

Один из способов получить портфель с такой же или близкой доходностью — это универсальный портфель. Стоит отметить, что универсальный портфель не является постоянно ребалансированным портфелем и не дает возможности восстанавливать желаемые постоянные веса.

¹Настоящее исследование второго автора частично поддержано Центром Математических исследований Ереванского Государственного Университета.

Сначала напомним основную концепцию универсальных портфелей и ее отношение к наилучшему постоянно ребалансированному портфелю.

2. Построение универсальных портфелей

Универсальный портфель — это портфель, чьи веса задаются по следующей рекурсивной формуле

$$(2.1) \quad \widehat{b}_k = \frac{\int b S_{k-1}(b) db}{\int S_{k-1}(b) db}$$

здесь b и $\widehat{b}_k$ являются m -мерными векторами, где b выступает в качестве переменной интегрирования, а $\widehat{b}_k$ представляет собой предполагаемые веса в k -время, m — это количество рассматриваемых активов ($k \geq 1$), и (см. [1])

$$(2.2) \quad b_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right).$$

Таким образом $b = (b_1, \dots, b_m)$, при

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^m b_i = 1, \quad b_i \geq 0; \quad i = \overline{1, m}$$

Оба интеграла берутся по $(m-1)$ -мерному симплексу, и

$$(2.4) \quad S_k(b) = \prod_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_i x_j(i)$$

где x_j — следующий m -вектор

$$(2.5) \quad x_j = (x_j(1), \dots, x_j(m)); \quad x_j(i) = \frac{S_i(j)}{S_i(j-1)},$$

а $S_i(t)$ обозначает стоимость i -го актива в момент времени t .

Таким образом, $S_k(b)$ показывает накопленное богатство портфеля для не зависящих от времени весов в период k (т.е. веса фиксируются раз и навсегда с $t = 0$, и портфель постоянно ребалансируется с этими начальными весами).

(2.1) — это средневзвешенное значение весовых векторов, где веса являются накопленным богатством, когда b берется как вектор констант для всех k периодов.

Эта проблема требует больших вычислительных затрат, поскольку добавление еще одного актива увеличивает требуемые симуляции на одну степень.

Этот вопрос рассматривался в значительной части соответствующей литературы. Мы хотели бы подчеркнуть, что некоторые работы были сосредоточены на сокращении

необходимых вычислений и симуляции (см. [2-6]). Большинство из них сосредоточены на улучшении оценки интегралов в (2.1). Однако некоторые, как, например, [5], пытаются изменить процесс получения выборки для лучшего моделирования.

Мы собираемся оценить (2.1) косвенным образом, используя байесовскую интерпретацию проблемы. Однако следует отметить, что мы делаем это для дискретной структуры исходных универсальных портфелей и стремимся предложить формулу в замкнутой форме, которая может быть не идентична прогнозам универсального портфеля, но все же достаточно близка, чтобы быть предпочтительнее, чем более вычислительно требовательная модель (2.1).

В статье [6] была рассмотрена основная идеология байесовского подхода, и предложены его интерпретации. В [6] показано, что универсальный портфель в непрерывной временной структуре похож (в их интерпретации идентичен, хотя они показали это только для частного случая) на байесовское построение портфеля. Последнее основано на портфеле Марковица, с перебалансировкой исторических данных (как в Блэке-Литтермане) или переоценкой распределения посредством байесовского обновления. Мы будем называть портфель с вектором весов, определяемым (2.1), универсальным портфелем (УП).

Отметим, что эта работа является продолжением наших работ, посвященных оценкам цен различных финансовых инструментов [8-11].

В следующем разделе рассмотрено основное соотношение из статьи Ковера [1] о постоянно ребалансируемых портфелях. 3-й и 4-й разделы посвящены байесовской интерпретации и реконструкции байесовских универсальных портфелей (БУП) с помощью сопряженной априорной. В 5-м разделе развиваются идеи включения дополнительных ограничений на веса в универсальные портфели.

Сначала мы показываем, что байесовское приближение справедливо в эмпирическом смысле, затем доказываем результат сходимости для сопряженной априорной вероятности Дирихле с мультиномиальным правдоподобием и, наконец, строим байесовский универсальный портфель с дополнительными ограничениями на веса.

3. Сравнение максимальных постоянно ребалансируемых и универсальных портфелей

Согласно Т. Каверу и формулам (2.1) и (2.4) можно получить, что

$$(3.1) \quad \widehat{S}_k := S_k(\widehat{b}_k) = \int b S_k(b) db$$

Имея

$$(3.2) \quad S_k(\widehat{b}_k) = \prod_{j=1}^k \widehat{b}_k \cdot x_j$$

и сделав следующие упрощения, получаем результат

$$\begin{aligned} \widehat{b}_k x_k &= \frac{\int (b \cdot x_k) S_{k-1}(b) db}{\int S_{k-1}(b) db} = \frac{\int (b \cdot x_k) \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} = \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} \\ S_k(\widehat{b}_k) &= \prod_{j=1}^k \widehat{b}_k \cdot x_j = \prod_{j=1}^k \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int \prod_{j=1}^{k-1} (b \cdot x_j) db} \\ &= \frac{\int \prod_{j=1}^k (b \cdot x_j) db}{\int db} = \frac{\int b S_k(b) db}{\int db} = \int b S_k(b) db \end{aligned}$$

В некотором смысле $S_k(\widehat{b}_k)$ — это усредненный портфель по всем возможным портфелям.

В то время как наилучший постоянно ребалансируемый портфель по времени k , обозначаемый S_k^* — это максимально возможное значение всех постоянно ребалансируемых портфелей, то есть

$$(3.3) \quad S_k^* = \max_b S_k(b).$$

Результат, заявленный Т. Ковером, асимптотически $\widehat{S}_k \sim S_k^* \cdot M(k, m)$, и

$$(3.4) \quad \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\widehat{S}_k}{S_k^*} \right) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0,$$

где предел берется по времени (т.е. по k), а $M(k, m)$ — некоторая константа, зависящая только от k и m . В какой-то степени она может также зависеть от k .

Замечание 3.1. В некотором смысле S_k^* невыполнимо, поскольку задача максимизации может быть решена только тогда, когда достигнуто время k и все реализации известны. Однако к ней можно приблизиться асимптотически, путем последовательного построения универсального портфеля (см. [1]).²

4. Байесовский подход

Очевидно, что $\widehat{b}_k$ трудно вычислить для больших m и k . Один из способов упростить вычисления — предоставить (возможно, рекурсивный) алгоритм или формулу для $\widehat{b}_k$.

²Может показаться неразумным ожидать, что среднее значение функции сойдется к максимуму функции в долгосрочной перспективе. Поэтому теория сосредоточена на логарифмах функций и только на первом члене разложений Тейлора. Это отчасти связано с методом приближения Лапласа.

Байесовский подход основан на рассмотрении b как вектора случайных переменных и постоянном обновлении апостериорного распределения с использованием формулы Байеса с известной функцией правдоподобия.

Проще говоря, в байесовской теории обновление работает следующим образом:

$$(4.1) \quad f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta)}{\int P(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta) d\theta}$$

где θ — неизвестный параметр (или в нашем случае вектор параметров), смоделированный как случайная величина, а $(x_1, \dots, x_n)$ — случайная выборка, $f(\theta)$ — априорная функция плотности.

Одной из важнейших особенностей байесовского обновления является то, что его можно выполнять в пакете или одной реализацией за один шаг, получая тот же результат, т.е.

$$(4.2) \quad f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_{k+1}, \dots, x_n|\theta, x_1, \dots, x_k) f(\theta|x_1, \dots, x_k)}{\int P(x_{k+1}, \dots, x_n|\theta, x_1, \dots, x_k) f(\theta|x_1, \dots, x_k) d\theta}$$

Для любого $k = \overline{1, n-1}$ с $f(\theta|x_1, \dots, x_k)$ вычисляемым согласно (4.1).

Одинаково сложно вычислить, имея n интегралов для n реализаций. Поэтому, можно использовать те априорные распределения, для которых апостериорное распределение (т.е. $f(\theta|x_1, \dots, x_n)$) останется в том же классе или семействе распределений, что и априорное.

Для известной функции правдоподобия можно будет получить классы распределений с этим свойством. Такие априорные распределения называются сопряженными.

В пределах этого класса только параметры распределения изменяются от априорного к апостериорному. И как только они получены, можно восстановить (рекурсивно) следующие апостериорные параметры для заданных наблюдений.

После этого, если задача требует оценки параметров, есть несколько способов получения $\hat{\theta}$. Три из них берут моду, среднее и медиану апостериорного распределения. В дальнейшем мы ограничимся этими оценками.

5. Байесовский метод для универсальных портфелей

Очевидно, в нашем случае искомые параметры — компоненты вектора b , поэтому у нас есть m — параметров, и функция правдоподобия должна быть m -параметрической. Кроме того, априорное и апостериорное распределения являются векторными распределениями.

Поскольку b — вектор в m -мерном симплексе, наиболее подходящим распределением является распределение Дирихле. К сожалению, функция правдоподобия имеет ограниченный спектр, поскольку мы хотим, чтобы Дирихле сопрягал априорное.

Лучшими соответствиями являются 1) категориальное распределение и 2) мультиномиальное распределение для функции правдоподобия. Для первого из них мы используем следующую конструкцию.

5.1. Категориальное распределение (Победитель среди активов). Каждая категория индексируется в соответствии с рассматриваемыми акциями. Так категория i обозначает i -ю акцию. Поскольку реализуется только одна из категорий, мы должны определить алгоритм взятия y_i -s.

Категориальное распределение должно быть одномерным, так что следует брать только одну реализацию в каждый момент времени k .

То есть, мы должны определить $g(x_k) = g(x_k(1), \dots, x_k(m))$ который принимает одно из m значений $g(x_k) \in \{1, \dots, m\}$.

Способ, который мы предлагаем для построения, таков

$$(5.1) \quad g(x_k) = \text{index}(\max(x_k(1), \dots, x_k(m))).$$

Этот метод довольно хорош и показателен. Его сравнение с общими универсальными портфелями можно оценить эмпирически.

Интуиция, лежащая в основе этого метода, настолько ясна, что даже при низкой результативности этот метод может быть предпочтен другим методам, даже универсальным портфелям. Однако есть некоторая потеря информации. Один из недостатков этого метода заключается в том, что мы игнорируем большую часть информации относительно величин.

Предположим, в один из дней наилучший результат был достигнут s -й акцией. Это означает, что только эта категория реализовалась, таким образом, она увеличит вероятность s -й категории (т.е. вероятность того, что s -я акция будет лучшей на следующий день, вырастет, в то время как вероятности других категорий будут одновременно (без изменения пропорциональности) снижены).

Однако предположим, что s -я акция лишь незначительно лучше, чем r -я акция (любая фиксированная акция). Этот метод намеренно игнорирует этот факт.

Второй недостаток в том, что каждый раз можно определить лучшую категорию, но мы отбрасываем вторую лучшую, третью лучшую и так далее.

Поскольку акции-победители могут резко меняться каждый раз (т.е. никакая чувствительность не может быть даже последовательно измерена), гораздо более разумно использовать другие формы вероятности, которые будут рассматривать относительные величины или относительные преимущества.

5.2. Мультиномиальное правдоподобие. Для мультиномиальной функции правдоподобия при фиксированном параметре N реализация каждого эксперимента суммируется до N . Таким образом, для каждой из m категорий и каждого дня k мы имеем

$$(5.2) \quad g(x_k) = (w_k(1), w_k(2), \dots, w_k(m))$$

Так что $\sum_{j=1}^m w_k(j) = N$.

Количество реализаций - w_{jk} -s должно определяться компонентами вектора x_k . Здравый смысл заключается в том, что наилучшему результату должно быть предписано большее количество, второму лучшему - второе большее и так далее. При этом следует отметить, что относительная величина также должна играть решающую роль в определении количества. Если наилучший результат значительно лучше всех других результатов, в то время как последние более или менее равны и очень малы, наилучшему результату должно быть предписано количество N , в то время как другие количества должны быть установлены на 0.

На данный момент мы используем следующий метод.

Задаем некоторое число $\bar{x}_k$. Мы делаем следующий промежуточный шаг,

$$(5.3) \quad v_{jk} = \begin{cases} \frac{x_{jk} - \bar{x}_k}{\min_i x_{ik} - \bar{x}_k}; & \min_i x_{ik} - \bar{x}_k > 0 \\ x_{jk} - \min_i x_{ik}; & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что одному из членов дано значение 1, тогда как другим теоретически даны более высокие значения, когда $\bar{x}_k$ достаточно мал.

И на следующем шаге мы выбираем достаточно большое число N и

$$w_{jk} = \left\lfloor N \cdot \frac{v_{jk}}{\sum_{j=1}^m v_{jk}} \right\rfloor,$$

где скобки обозначают целую часть, или округление вниз до ближайшего целого числа. Если нам повезет, сумма подсчетов действительно даст N . На практике, однако, мы получаем $N - 1$.

Более того, есть некоторые причины взять $\bar{x}_k = \bar{x}$, т. е. не зависящее от времени. И в этом случае, если не выбирать мудро, можно получить отрицательные значения для случаев, где для лучших результатов следует назначить меньшие значения.

Замечание 5.1. Обратите внимание, что в приведенной выше формуле v -s знаменатель не играет решающей роли в w -s. Поэтому мы можем определить $v_{jk} = x_{jk} - \bar{x}_k$. Однако, следует учесть, что $\bar{x}_k \leq \min_i x_{ik}$.

Экспериментально, в некоторых случаях лучше сохранять отрицательные значения устанавливать $\bar{x}_k$ как можно ближе к 1. В долгосрочной перспективе просчеты исчезнут.

Вот некоторые эмпирические результаты по универсальным портфелям.

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовское среднее ($\bar{x} \ll \min$)	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)
1 год/ 2 актива			
b_0	0.7942882	0.5054	0.7968937
b_1	0.2057118	0.4946	0.2031063
1 год/ 4 актива			
b_0	0.24372	0.25064	0.24143
b_1	0.22312	0.24881	0.20233
b_2	0.36963	0.26055	0.35117
b_3	0.16353	0.23999	0.205075

Таблица 1:Пример портфелей из 2 и 4 акций (взяты случайным образом).

Обратите внимание, что чем ближе мы берем $\bar{x}$ к 1, тем более близкие значения мы получаем. Хотя это требует некоторых вычислений (по одному для каждого временного интервала). В противном случае, если мы берем $\bar{x}$ малым, портфель будет разделен поровну.

Конструктивно можно показать, используя биномиальные приближения нормальных распределений, что указанный выше портфель должен сходиться к универсальному.

Теорема 5.1. С мультиномиальным правдоподобием и сопряженным Дирихле априорным распределением, начиная с вектора равных коэффициентов, верно, что при $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{k} E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))) - \ln \widehat{S}_k \right) \rightarrow 0$$

С $f (\theta | x_1, \dots, x_k)$ и $\widehat{b}_k$ как в (3.4) и (2.1) соответственно.

Замечание 5.2. *Байесовское универсальное обновление преследует универсальный портфель в бесконечности. Нельзя утверждать, что байесовское универсальное находится в непосредственной близости от универсального портфеля на каждом шаге, как показывает эмпирика.*

Набросок доказательства: Согласно теореме Бернштейна-фон Мизеса, байесовское обновление будет сходиться к истинным моделям параметров, независимо от того, какое априорное значение взято.

Однако, если модель указана неверно, сходимость все равно может быть установлена, но смещена. Эта неправильная спецификация может быть вызвана неверной функцией правдоподобия.

В нашем случае нет правильных значений весов. Поэтому мы не можем сказать, что модель имеет истинные параметры модели, и в долгосрочной перспективе истинные параметры остаются нераскрытыми до желаемой конечной точки. Точнее, изменение k изменит аргумент b^* решения (3.2).

Однако сходимость все еще может быть установлена как сходимость в стохастических процессах в среднеквадратичном смысле.

Можно утверждать, что метод Ковера действительно похож на метод Бернштейна-фон Мизеса с зависящей от времени обратной матрицей информации Фишера, называемой матрицей чувствительности.

Замечание 5.3. *Наш процесс несколько связан с процессом Дирихле, см. [10]. Главное отличие состоит в том, что построение процесса Дирихле обычно определяется на связном подмножестве. В нашем случае рассматриваемое множество само по себе дискретно (в нашем случае это число рассматриваемых активов).*

Итак, по результату Ковера мы имеем, что

$$E \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{\widehat{S}_k}{S_k^*} \right) \right) \rightarrow 0$$

Это верно для любой (неслучайной) последовательности результатов. Однако, с другой стороны, известно, что согласно теореме Бернштейна-фон Мизеса апостериорное распределение сходится к гауссовскому распределению с правильным (в обсуждаемом выше смысле) средним. Таким образом,

$$E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f(\theta|x_1, \dots, x_k)))) - \ln S_k^* \right) \rightarrow 0$$

Или

$$\frac{1}{k} E \left(\ln (S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))) - \ln S_k^* \right) \rightarrow 0$$

В таком случае, имеем

$$E \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{S_k (\operatorname{argmax}_{\theta} (f (\theta | x_1, \dots, x_k)))}{\widehat{S}_k} \right) \right) \rightarrow 0$$

Замечание 5.4. Обратите внимание, что выбор $\bar{x}$ не имеет значения с теоретической точки зрения. Но при неразумном выборе мы можем оказаться вне процесса Дирихле, и, таким образом, сделать приведенную выше теорему неприменимой. С другой стороны, при выборе слишком малого значения мы просто делаем обновление слишком медленным, что сильно затрудняет процесс обновления.

6. Байесовские универсальные портфели с ограничениями

Хотя добавление ограничений к универсальным портфелям напрямую может быть сложным и может затруднить оценку. Также трудно понять, обеспечит ли ограниченная версия какую-либо сходимость или будет сходиться к лучшим постоянно перебалансированным портфелям с теми же ограничениями на веса.

В байесовской структуре, описанной выше, мы используем байесовский подход, чтобы включить эти ограничения непосредственно в портфель.

Самый оптимальный способ сделать это — ограничить функцию правдоподобия желаемыми областями. Хотя это хорошая стратегия, она нарушает свойство сопряженности предварительного распределения, что затрудняет прямой вывод окончательной формулы. Тем не менее, можно использовать рекурсивную формулу.

Еще один способ — обновить апостериорное распределение только с помощью элемента выборки, который будет ограничиваться заданными границами. В этом случае эмпирические распределения желательны близки.

Вот краткое изложение эмпирических результатов

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)	Ограничения
1 year/ 4 stocks			
b_0	0.2774	0.3097	[0.2, 0.4]
b_1	0.1954	0.1799	[0.1, 0.25]
b_2	0.1525	0.1561	[0.1, 0.2]

	Весовые коэффициенты универсального портфеля	Байесовские весовые коэффициенты ($\bar{x} \approx$ $\min(1, \min_{i,k} x_{ik})$)	Ограничения
b_3	0.3747	0.3542	

Table 2: Пример портфеля из 4 акций (взяты случайным образом).

Abstract. Universal portfolio, is recursively constructive portfolio. Though different initially, eventually the portfolio average return remains close to that of best constantly rebalanced portfolio. For that purpose, recursive update of weights was obtained by Cover. The main problem with universal portfolios is the required computational power. In this paper we provide different look at the portfolio construction. We argue that some sort of Bayesian process may be enough to converge to same results. We show, both empirically and theoretically, that Bayesian update process, without regard to particular distribution of stocks' prices processes, will replicate the same behavior as universal portfolio. We also show empirically that universal portfolios with constraints maybe also treated by this mechanism.

Список литературы

- [1] T. M. Cover, "Universal portfolios", *Mathematical finance*, **1**(1), 1 – 29 (1991).
- [2] T. M. Cover, D. H. Gluss, "Empirical Bayes stock market portfolios", *Advances in applied mathematics*, **7**, no. 2, 170 – 181 (1986).
- [3] E. Ordentlich, T. M. Cover, "The cost of achieving the best portfolio in hindsight", *Mathematics of Operations Research*, **23**(4), 960 – 982 (1998).
- [4] A. T. Kalai, S. Vempala, "Efficient algorithms for universal portfolios", *Journal of Machine Learning Research*, 423 – 440 (2002).
- [5] H. Ishijima, "Numerical methods for universal portfolios", *Proceedings of the Quantitative Methods in Finance Conference* (2001, December).
- [6] H. Ishijima, "Bayesian Interpretation of Continuous-time Universal Portfolios (Special Issue on Theory", *Methodology and Applications in Financial Engineering*, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(4), 362 – 372 (2002).
- [7] S. T. Rachev, J.S. Hsu, B. S. Bagasheva, F.J. Fabozzi, *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons (2008).
- [8] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Monte Carlo method for geometric average options on several futures", *Modeling of Artificial Intelligence*, (2), 88 – 93 (2016).
- [9] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Curran's method for approximating arithmetic average option for several futures", *Modeling of Artificial Intelligence*, (4-1), 14 – 20 (2017).
- [10] H. Kechejian, V. K. Ohanyan, V. G. Bardakhchyan, "Algorithm of calculation of combined commodity options value", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **57**(1), 59 – 65 (2022).
- [11] S. Ghosal, A. W. van der Vaart, *Fundamentals of Nonparametric Bayesian Inference*, **44**, Cambridge University Press (2017).

Поступила 19 декабря 2024

После доработки 20 января 2025

Принята к публикации 12 февраля 2025