

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПАРАХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ УОЛША

М. Г. ГРИГОРЯН, А. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет¹
E-mails: *gmarting@ysu.am*; *asargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказано, что существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: ряд Фурье; система Уолша; коэффициенты Фурье; весовое пространство; сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает исследования авторов ([1]-[5]) связанных с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по системе Уолша универсальны в смысле знаков в различных функциональных классах. Необходимо отметить, что понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова [6] и Талаляна [7]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Пусть $L_\mu^p[0, 1]$, $p > 0$ – класс всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx < \infty$, где $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ – весовая функция (т.е. измеримых на $[0, 1]$, положительных функций). Пусть $f(x)$, $f_k(x) \in L_\mu^p[0, 1]$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ($\mathbf{N}$ – совокупность натуральных чисел).

Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в $L_\mu^p[0, 1]$, если частичные суммы: $\sum_{k=0}^n f_k(x)$, $k \in \mathbf{N}$ этого ряда сходятся к $f(x)$ в метрике $L_\mu^p[0, 1]$, т.е.

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right|^p \mu(x) dx.$$

Пусть $L^0[0, 1]$ – класс всех почти везде конечных, измеримых на $[0, 1]$ функций. Под сходимостью в $L^0[0, 1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0, 1]$ и пусть

$$(1.2) \quad c_k(U) = \int_0^1 U(x) \varphi_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}$$

коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0, 1]$.

Пусть S – одно из пространств $L_{\mu}^p[0, 1]$, $p > 0$ или $L^0[0, 1]$.

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0, 1]$ и последовательность знаков $\delta = \{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ образуют универсальную пару (U, δ) для класса S (для пространства $L_{\mu}^1[0, 1]$) относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, если частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ плотны в S .

Определение 1.2. Функция $U \in L^1[0, 1]$ называется универсальной для класса S , относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ в S .

Нетрудно видеть, что каковы бы не были число $p \in [1, \infty)$ и ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ не существует функции $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы универсальной для класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле знаков.

В [4] построена функция $U \in L^1[0, 1]$, которая универсальна для класса $L^0[0, 1]$, относительно системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков.

Первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [8] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [9] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции. (см. также [10]–[13]).

Отметим, что в работах [14]–[21] были получены результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых (по системе Уолша либо по тригонометрической системе) универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

В работах [3] и [17] был изучен вопрос существования как универсальных пар (U, δ) , так и универсальных функций в смысле знаков для классов $L^p[0, 1]$ при $p \in (0, 1)$ относительно системы Уолша, а также относительно тригонометрической системы.

В этой статье мы рассмотрим аналогичный вопрос для класса $L_\mu^1[0, 1]$ и докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша.*

Замечание 1.1. *Нетрудно видеть, что теорема 1 окончательна в следующих смыслах:*

- а) для класса $L^1[0, 1]$ не существует универсальной пары (U, δ) ,
- б) коково бы не было весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$ для него не существует интегрируемой функции, частичные суммы ряда Фурье-Уолша которой плотны в $L_\mu^1[0, 1]$.

Теорема 1.1 следует из более сильной Теоремы 1.2.

Теорема 1.2. *Существует весовое пространство $L_\mu^1[0, 1]$ с $0 < \mu(x) \leq 1, x \in [0, 1]$, для которого можно построить универсальную пару (U, δ) относительно системы Уолша такую, что*

- а) функция $U \in L^1[0, 1]$ имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье по системе Уолша и ее ряд Фурье – Уолша сходится в метрике $L^1[0, 1]$,

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, k \leq n; \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

где $\#\{E\}$ – число элементов конечного множества E .

- с) функция $U \in L^1[0, 1]$ является универсальной для класса $L_\mu^1[0, 1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Вопрос. Верна ли теорема 1.2 для тригонометрической системы (и для других классических систем)?

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

При доказательстве теоремы 1.2 воспользуемся следующей леммой, доказанной в работе [2].

Лемма 2.1. *Существует весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$ такая, что для любых чисел $n_0 \geq 1$, $\eta \in (0, 1)$ и ступенчатой функции $f(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\tilde{\Delta}_m}(x)$, где $\tilde{\gamma}_m \neq 0$ и $\{\tilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ – суть непересекающиеся двоичные интервалы с $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\tilde{\Delta}_m| = 1$. Тогда можно найти полиномы*

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x),$$

$$Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \quad 0 < a_{k+1} \leq a_k < \eta, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$$

$$2) \quad \int_0^1 |f(x) - Q(x)| \mu(x) dx < \eta,$$

$$3) \quad \max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^M \delta_k a_k W_k(x) \right| \mu(x) dx < 5 \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx + \eta,$$

$$4) \quad \max_{2^{n_0} \leq M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right| dx < \eta.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность всех ступенчатых функций вида

$$(3.1) \quad f_n(x) = \sum_{j=1}^{2^{l_n}} \gamma_n^{(j)} \chi_{\Delta_{l_n}^{(j)}}(x)$$

с рациональными $\gamma_n^{(j)} \neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{2^{l_n}} |\Delta_j^{(j)}| = 1$, где $\{\Delta_{l_n}^{(j)}\}_{j=1}^{2^{l_n}}$ — непересекающиеся двоичные интервалы. Применим Лемму 2.1, полагая $n_0 = 1$, $\eta = 2^{-5}$, $f(x) = f_1(x)$. Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$U_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_1^*-1} a_k^{(1)} W_k(x), \quad Q_1^{(1)}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_1^*-1} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x), \quad M_1 = 2, \quad M_1^* = 2^{m_1},$$

удовлетворяющие условиям:

$$0 < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < \frac{1}{8}, \quad \delta_k^{(1)} = \pm 1, \quad k \in [M_1, M_1^*),$$

$$\int_0^1 |f_1(x) - Q_1^{(1)}(x)| \mu(x) dx < 2^{-6},$$

$$\int_0^1 |Q_1^{(1)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_1, M_1^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_1}^m \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 4 \int_0^1 |f_1(x)| dx,$$

$$\int_0^1 |U_1^{(1)}(x)| dx < \max_{m \in [M_1, M_1^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_1}^m a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 2^{-3}.$$

Положим

$$M_2 = 2^4 M_1^*, \quad U_1^{(*)}(x) = \sum_{k=M_1^*}^{M_2} b_k^{(1)} W_k(x),$$

где

$$0 < b_{M_2-1}^{(1)} < \dots < b_k^{(1)} < \dots < b_{M_1^*}^{(1)} < a_{M_1^*-1}^{(1)}, \quad \sum_{k=M_1^*}^{M_2-1} b_k^{(1)} < 2^{-4}.$$

Снова применим лемму, полагая

$$n_0 = [\log_2 M_2], \quad \eta = \min\{b_{M_2-1}^{(1)}; 2^{-8}\}, \quad f(x) = \{f_1(x) - U_1^{(1)}(x) - U_1^{(*)}(x)\}.$$

Тогда определяются полиномы по системе Уолша вида

$$U_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} a_k^{(1)} W_k(x), \quad Q_1^{(2)}(x) = \sum_{k=M_2}^{M_3-1} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x), \quad k \in [M_2, M_3) = [2^{m_1}, 2^{m_2}),$$

удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} 0 < a_{M_3-1}^{(1)} < \dots < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < a_{M_2}^{(1)} < b_{M_2-1}^{(1)}, \quad k \in [M_2, M_3), \\ \delta_k^{(1)} = \pm 1, \forall k \in [M_2, M_3), \\ \int_0^1 |(f_1(x) - U_1^{(1)}(x)) - U_1^{(*)}(x) - Q_1^{(2)}(x)| \mu(x) dx < 2^{-8}, \\ \int_0^1 |U_1^{(2)}(x)| dx < \max_{m \in [M_2, M_3)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_2}^m a_k^{(1)} W_k(x) \right| dx < 2^{-8}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности полиномов $\{U_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{U_n^{(*)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(1)}(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{Q_n^{(2)}(x)\}_{n=1}^\infty$ вида

(3.2)

$$U_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}^*}^{M_n^*-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad Q_n^{(1)}(x) = \sum_{k=M_{2n-1}^*}^{M_n^*-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x), \quad M_n^* = 2^{m_n},$$

$$(3.3) \quad U_n^{(*)}(x) = \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} W_k(x), \quad M_{2n} = 2^{4n} M_n^*, \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} < 2^{-4(n+2)}$$

$$(3.4) \quad U_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_k^{(n)} W_k(x), \quad Q_n^{(2)}(x) = \sum_{k=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x),$$

которые для каждого $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям:

$$(3.5) \quad M_{2n-1} < M_n^* < M_{2n} = 2^{4n} M_n^* < M_{2n+1}, \quad \delta_k^{(n)} = 1, \quad k \in [M_n^*, M_{2n}),$$

$$(3.6) \quad \delta_k^{(n)} = \pm 1, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} 0 < a_{M_{2n+1}}^{(n+1)} < a_{M_{2n+1}-1}^{(n)} < \dots < a_{j+1}^{(n)} < a_j^{(n)} < \dots < \\ < a_{M_{2n}}^{(n)} < b_{M_{2n}-1}^{(n)} < \dots < b_{k+1}^{(n)} < b_k^{(n)} < \dots < b_{M_n^*}^{(n)} < \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad < a_{M_1^*-1}^{(n)} < \dots < a_{s+1}^{(n)} < \dots < a_s^{(n)} < \dots < a_{M_{2n-1}}^{(n)} < a_{M_{2n-1}-1}^{(n-1)},$$

где $j \in [M_{2n}, M_{2n+1})$, $k \in [M_n^*, M_{2n})$, $s \in [M_{2n-1}, M_n^*)$.

$$(3.8) \quad \sum_{k=M_n^*}^{M_{2n}-1} b_k^{(n)} < 2^{-6(n+1)} < 2^{-4(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3.9) \quad \int_0^1 |U_n^{(1)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_{2n-1}, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m a_k^{(n)} W_k(x) \right| dx < 2^{-5(n+1)}.$$

$$(3.10) \quad \int_0^1 |U_n^{(2)}(x)| dx \leq \max_{m \in [M_{2n}, M_{2n+1})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n}}^m a_k^{(n)} W_k(x) \right| dx < 2^{-5(n+1)},$$

$$(3.11) \quad \int_0^1 \left| \left\{ f_n(x) - \sum_{j=1}^n \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right\} \mu(x) \right| dx < 2^{-3n},$$

$$(3.12) \quad \int_0^1 \left| \left\{ f_n(x) - Q_n^{(1)}(x) \right\} \mu(x) \right| dx < 2^{-4(n+4)},$$

$$(3.13) \quad \max_{m \in [M_{2n-1}, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m \delta_k^{(n)} a_k^{(n)} W_k(x) \right| \mu(x) dx < 5 \int_0^1 |f_n(x)| \mu(x) dx.$$

Положим

$$(3.14) \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_k = a_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}),$$

$$a_k = b_k^{(n)}, \quad k \in [M_n^*, M_{2n}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0(x) = 2W_0(x) + W_1(x).$$

Из (3.3), (3.8) – (3.10) следует

$$(3.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left| U_n^{(1)}(x) + U_n^{(*)}(x) + U_n^{(2)}(x) \right| dx \right) < \infty.$$

Определим функцию $U(x)$ следующим образом:

$$(3.16) \quad U(x) = U_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(U_n^{(1)}(x) + U_n^{(*)}(x) + U_n^{(2)}(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x).$$

Из (3.14) и (3.15) вытекает $U(x) \in L^1[0, 1]$.

Учитывая соотношения (3.2), (3.4), (3.14) – (3.16) получим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $U(x)$ по $L^1[0, 1]$ норме, и, следовательно,

$$(3.17) \quad a_k = c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В силу (3.7) и (3.14) – (3.17) будем иметь $\{c_k(U)\}_{n=1}^{\infty} \searrow$.

Положим

$$\delta_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2n-1}, M_n^*) \cup [M_{2n}, M_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3.18) \quad \delta_0 = \delta_1 = 1; \quad \delta_k = 1, \quad k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [M_n^*, M_{2n}).$$

Из (3.3), (3.6) и (3.18) следует

$$(3.19) \quad \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, \quad k \leq M_{2n}; \quad \delta_k = 1\}}{M_{2n}} \geq \frac{M_{2n} - M_n^*}{M_{2n}} = \frac{2^{4n} M_n^* - M_n^*}{2^{4n} M_n^*} = 1 - \frac{1}{2^{4n}}.$$

В силу (3.18) и (3.19) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\#\{k \in \mathbf{N}, \quad k \leq n; \quad \delta_k = 1\}}{n} = 1,$$

т.е. утверждение б) теоремы 1.2 доказано.

Теперь докажем, что ряд

$$(3.20) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$$

универсален в пространстве $L_{\mu}^1[0, 1]$. Пусть $f(x) \in L_{\mu}^1[0, 1]$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{n_k=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$(3.21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - U_0(x) - f_{n_k}(x)| \mu(x) dx = 0, \quad n_1 \geq n^{\nabla}.$$

Обозначая через $N_k = M_{2n_k+1} - 1$, $k = 1, 2, \dots$, из (3.2) – (3.4), (3.11) и (3.21) будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{s=0}^{N_k} \delta_s c_s(U) W_s(x) - f(x) \right| \mu(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - U_0(x) - f_{n_k}(x)| \mu(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left| f_{n_k}(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + Q_j^{(2)}(x) \right) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-n_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $\delta_k = \pm 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (см. (3.6) и (3.18)) будем иметь, что функция $U(x)$ и последовательность знаков $\delta = \{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ образуют универсальную пару (U, δ) .

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось проверить, что функция $U(x)$ универсальна для $L_{\mu}^1[0, 1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $L_{\mu}^1[0, 1]$. Из последовательности функций (3.1) выберем такую функцию $f_{\nu_1}(x)$, $\nu_1 \geq 2$, что

$$\int_0^1 |f^*(x) - f_{\lambda_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2(n+4)}, \quad f^*(x) = f(x) - U_0(x).$$

Отсюда и из (3.12) вытекает

$$\int_0^1 \left| f^*(x) - Q_{\lambda_1}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx < 2^{-2(n+3)}.$$

Предположим, что уже определены числа $1 < \lambda_1 < \dots < \lambda_q$ функции $f_{\lambda_1}(x)$, ..., $f_{\lambda_q}(x)$, и полиномы $\{Q_{\lambda_r}^{(1)}(x)\}_{r=1}^q$, $\{\Lambda_n(x)\}_{n=1}^q$, удовлетворяющие условиям:

$$(3.22) \quad \Lambda_q(x) = \sum_{n=\lambda_{q-1}+1}^{\lambda_q} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(*)}(x) + U_j^{(2)}(x) \right), \quad f^*(x) = f(x) - U_0(x),$$

$$(3.23) \quad \int_0^1 \left| f_{\lambda_q}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2q}, \quad q > 1,$$

$$(3.24) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+1)}.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\lambda_{q+1} > \lambda_q + q$, функцию $f_{\lambda_{q+1}}(x)$ из последовательности (3.1) таким образом, чтобы

$$(3.25) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - f_{\lambda_{q+1}}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+5)}.$$

Отсюда и из (3.12) и (3.25) вытекает

$$(3.26) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} - Q_{\lambda_{q+1}}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+4)}$$

$$(3.27) \quad \int_0^1 \left| f_{\lambda_{q+1}}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+5)} + 2^{-2(q+5)} \leq 2^{-2(q+1)}, \quad q > 1.$$

Положим

$$(3.28) \quad \Lambda_{q+1}(x) = \sum_{n=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \left(U_j^{(1)}(x) + U_j^{(2)}(x) + U_j^{(*)}(x) \right).$$

Отсюда и из (3.3), (3.8) – (3.10), (3.26) и (3.28) следует

$$(3.29) \quad \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{q+1} \left[\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x) \right] \right\} \right| \mu(x) dx \leq$$

$$\leq 2^{-2(q+4)} + \int_0^1 \left| \Lambda_{q+1}(x) \right| \mu(x) dx + \int_0^1 \left| U_{\lambda_{q+1}}^{(1)}(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-2(q+3)}.$$

Положим

$$(3.30) \quad \varepsilon_k = \delta_k^{(n)}, \quad k \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q}); \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \notin \bigcup_{q=1}^{\infty} [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q}).$$

В силу (3.13), (3.7) и (3.30) имеем

$$(3.31) \quad \begin{aligned} & \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx = \\ & = \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \delta_k^{(\lambda_q)} a_k^{(\lambda_q)} W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq \\ & \leq 5 \int_0^1 |f_{\lambda_q}(x)| \mu(x) dx \leq 5 \cdot 2^{-2q}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.8) – (3.10), (3.14), (3.17), (3.30) и (3.31) для любых $N \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_{q+1}-1})$ и $q > 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^N \varepsilon_k c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq \\ & \int_0^1 \left| f^*(x) - \left\{ \sum_{j=1}^q [\Lambda_j(x) - U_{\lambda_j}^{(1)}(x) + Q_{\lambda_j}^{(1)}(x)] \right\} \right| \mu(x) dx + \\ & + \sum_{n=\lambda_q+1}^{\lambda_{q+1}} \left(\max_{m \in [M_{2n-1}, M_n^*)} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^m c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx + \right. \\ & \quad \left. \max_{s \in [M_n^*, M_{2n})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n-1}}^s c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx \right) + \\ & + \max_{s \in [M_{2n}, M_{2n+1})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2n}}^s c_k(U) W_k(x) \right| \mu(x) dx + \\ & + \max_{m \in [M_{2\lambda_q-1}, M_{2\lambda_q})} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_{2\lambda_q-1}}^m \delta_k^{(\lambda_q)} a_k^{(\lambda_q)} W_k(x) \right| \mu(x) dx \leq 2^{-q+3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $q \rightarrow \infty$ когда $N \rightarrow \infty$ заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $f(x)$ по норме в метрике $L_{\mu}^1[0, 1)$. Теорема 1.2 доказана. $\square$

Abstract. In this paper it is proved that there exists a weighted space $L_{\mu}^1[0, 1)$ for which it is possible to construct a universal pair (U, δ) with respect to the Walsh system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0, 1], p \in (0, 1)$ ”, journal of Func. Anal. **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).
- [2] A. A. Sargsyan, M. G. Grigorian, “Universal function for a weighted space”, Positivity **21**, 1457 – 1482 (2017).
- [3] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье-Уолша”, Матем. Сб., **211**, no. 6, 107 – 131 (2020).
- [4] М. Г. Григорян, “Об универсальных (в смысле знаков) рядах Фурье по системе Уолша”, Матем. Сб. **215**, no. 6, 717 – 742 (2024).
- [5] A. A. Sargsyan, “On the existence of universal functions with respect to the double Walsh system for classes of integrable functions”, Colloquium Mathematicum, **161**, 111 – 129 (2020).
- [6] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, **20**, no. 2, 197 – 238 (1947).
- [7] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР, **10**, no. 3, 17 – 34 (1957).
- [8] G. D. Birkhoff, “Démonstration d’un théorème élémentaire sur les fonctions entières”, C. R. Acad. Sci. Paris. **189**, 473 – 475 (1929).
- [9] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres derives”, Fund. Math. **24**, 305 – 308 (1935).
- [10] V. G. Krotov, “Smoothness of the universal Marcinkiewicz functions and universal trigonometric series”, Izv. universities. Mat., **8**, 26 – 35 (1991).
- [11] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, J. Anal. Math. **2**, 72 – 87 (1952).
- [12] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, Mitt. Math., Semin. Giessen, **176**, 1 – 84 (1987).
- [13] W. Luh, “Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets”, Analysis 6, 191 – 207 (1986).
- [14] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., **632**:1, 41 – 60 (1999).
- [15] A. A. Sargsyan, “Quasiuniversal Fourier-Walsh series for the classes $L^p[0, 1], p > 1$ ”, Math. Notes, **104**:2, 278 – 292 (2018).
- [16] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**(2), 215 – 231 (2019).
- [17] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**, **2**, 73 – 94 (2021).
- [18] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On the universal functions”, Journal of Approximation Theory, **225**, 191 – 208 (2018).
- [19] M. G. Grigorian, T. M. Grigorian, A. A. Sargsyan, “On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0, 1], p \geq 1$ ”, Banach J. Math. Anal. **12**, no. 1, pp. 104 – 125 (2018).
- [20] M. G. Grigoryan, L. N. Galoyan, “On Fourier series that are universal modulo signs”, Studia Mathematica, **249**(2), 215 – 231 (2019).
- [21] M. G. Grigorian, “On universal Fourier series in the Walsh system”, Siberian Mathematical Journal, **63**:3, 868 – 882 (2022).

Поступила 08 ноября 2024

После доработки 05 февраля 2025

Принята к публикации 22 февраля 2025