

А. Л. Шагинян, член-корресп. АН Арм. ССР

Об одном признаке нормальности семейства аналитических функций

(Представлено 10 X 1945)

Различного рода критерии нормальности семейства аналитических функций получались, налагая определенные ограничения либо непосредственно на значения, принимаемые функциями, либо на различного типа средние значения, или, наконец, на их рост вблизи границы области.

Здесь мы приводим некоторого смешанного типа критерий нормальности семейства аналитических функций.

1. Обозначения: L_1 — кривая с уравнением $y = \Delta(x)$, где $\Delta(x) \geq 0$ — однозначная непрерывная в $(-\infty, \infty)$ функция с кусочно-непрерывной в любом конечном промежутке производной и

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \Delta(x) = 0;$$

L_k — кривая с уравнением $y = k \cdot \Delta(x)$, где $0 < k < 1$; B_{k_1, k_2} — область, ограниченная кривыми L_{k_1} и L_{k_2} ; α — угол, составленный касательной к L_1 с осью Ox ; наконец, устанавливаем на L_k положительное направление в сторону возрастающих абсцисс.

2. Пусть функции $\{f_{\eta}(z)\}$, определяемые значениями индекса η , регулярны везде слева от некоторого L_{k_0} ($0 < k_0 < 1$) и непрерывны вплоть до L_{k_0} за исключением, может быть, точки $z = \infty$. Условимся относить функции $\{f_{\eta}(z)\}$ к классу S в области $B_{k_0, 1}$ если:

а) для каждой функции $f_{\eta}(z)$ этого семейства можно указать последовательность чисел $\gamma_{\eta, 1} < \gamma_{\eta, 2} < \dots < \gamma_{\eta, n} \rightarrow \infty$ и постоянную для всего семейства константу $0 < p < 1$ такие, что на круговых дугах $C_{\eta, n}$ окружностей $|z| = \gamma_{\eta, n}$ слева от L_{k_0} выполняются неравенства

$$|f_{\eta}(z)| < e^{|z|^p}$$

$$6) \text{ Существуют интегралы } \iint_{B_{k_0,1}} |f_\eta(z)|^2 dx dy \quad (1)$$

3. ТЕОРЕМА. Если

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \sec x}{\ln |x|} = m < 1 \quad (2)$$

и в B_{k_0, k_1}

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} = S < 1 \quad (3)$$

и при всех η

$$\iint_{B_{k_0,1}} |f_\eta(z)|^2 dx dy < M, \quad (4)$$

где M — постоянная, не зависящая от индекса η , тогда семейство $\{f_\eta(z)\}$ нормально везде в части плоскости слева от кривой L_{k_0} .

Условием (1) мы ограничиваем близость направления полосы $B_{k_0,1}$ к направлению оси Oy , что, как увидим, существенно необходимо для справедливости теоремы в ее общности.

Для доказательства достаточно выявить равномерную ограниченность функций $\{f_\eta(z)\}$ в произвольной конечной части z — плоскости, слева от L_{k_0} . И так как вследствие условия (3) семейство $\{f_\eta(z)\}$ заведомо нормально внутри $B_{k_0,1}$ то достаточно доказать равномерную ограниченность этого семейства в области Q_{r_0} ограниченной дугой L_{k_1} кривой L_{k_1} ($K_0 < k < 1$) и дугой окружности $|z| = r_0$, при любом r_0 .

Применим к области, ограниченной дугой L_{k_1} кривой L_k ($K_0 < k < K_0 < K_1$) и дугой окружности $C_{\eta,n}$, формулу Коши, считая n настолько большим, чтобы Q_{r_0} находилась строго внутри этой области.

Для любого z в Q_{r_0} имеем

$$f_\eta(z) \cdot e^{-\epsilon z^{p'}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{f_\eta(t) \cdot e^{-\epsilon t^{p'}}}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\eta,n}} \dots \dots \dots$$

$$(|\epsilon| = 1, \quad r_0 < p' < 1)$$

Учитывая неравенство (1) и условия $r_0 < p' < 1$ подберем ϵ ($|\epsilon| = 1$) так, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{\eta,n}} \frac{f_\eta(t) e^{-\epsilon t^{p'}}}{t-z} = 0.$$

При достаточно большом n

$$\left| f_{\eta}(z) e^{-\varepsilon z^{p'}} \right| \leq 1 + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{L'_k} \frac{f_{\eta}(t) e^{-\varepsilon t^{p'}}}{t-z} dt \right|.$$

Обозначив δ -расстояние области Q_{r_0} до кривой L_{k_2} , получим

$$\left| f_{\eta}(z) e^{-\varepsilon z^{p'}} \right| < 1 + \frac{1}{2\pi\delta} \int_{L'_k} \left| f_{\eta}(t) e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| |dt|,$$

По неравенству Буняковского-Шварца

$$\left[\left| f_{\eta}(z) e^{-\varepsilon z^{p'}} \right| - 1 \right]^2 4\pi^2 \delta^2 < \int_{L'_k} \left| f_{\eta}(t) \right| \left| e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| |dt| \cdot \int_{L'_k} \left| e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| |dt|. \quad (5)$$

На кривой L_k $|dt| = \left| \frac{dt}{dx} \right| |dx| = k \sec \alpha |dx|$.

Считая $1 > p' > \sup \{ p_0, m, s \}$, получим

$$\int_{L'_k} \left| e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| |dt| < \int_{L_k} \dots < \text{Const.} = q,$$

$$\text{и } \left| e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| |dt| \leq \left| e^{-\varepsilon t^{p'}} \right| \cdot \sec \alpha |dx| < e^{-|t|^{p''}} \quad (6)$$

где

$$\sup \{ p_0, m, s \} < p'' < p'.$$

Последние неравенства выполняются для достаточно больших $|x|$, но, не ограничивая общности, можно пользоваться ими везде на L_k .

Учитывая неравенства (6), умножив обе части неравенства (5) на dk и интегрируя в пределах от $k=k_0$ до $k=k_2$, получим

$$\left[\left| f_{\eta}(z) e^{-\varepsilon z^{p'}} \right| - 1 \right]^2 < \text{Const.} \iint_{B_{k_0, k_2}} \left| f_{\eta}(t) \right|^2 e^{-|t|^{p''}} dx dk. \quad (7)$$

Перейдем в интеграле $\iint_{B_{k_0, k_2}} \left| f_{\eta}(t) \right|^2 dx dy$ к переменным $X=x$,

$$y = (1-k) \cdot \Delta(x);$$

функциональный определитель этого преобразования будет $\Delta(x)$, следовательно

$$\iint_{B_{k_0, k_2}} \left| f_{\eta}(t) \right|^2 dx dy = \iint_{B_{k_0, k_2}} \left| f_{\eta}(t) \right|^2 \Delta(x) dx dk. \quad (8)$$

Учтя неравенство (3) и условие $\text{Sup} \{ p_0, m, s \} < p'' < p'$, получим

$$\iint_{B_{k_0, k_2}} |f_{\eta}(t)|^2 e^{-|t|^{p''}} dx dk < \iint_{B_{k_0, k_1}} |f_{\eta}(t)|^2 dx dk < M,$$

где M — константа в неравенстве (4).

Окончательно в области Q_{r_0}

$$\left| f_{\eta}(z) \cdot e^{-\varepsilon z^{p'}} \right| < \text{Const.}, \text{ т. е. } \left| f_{\eta}(z) \right| < \text{Const.},$$

где Const. не зависит от η и положения точки z в Q_{r_0} .

Конформным отображением верхней полуплоскости на различного вида односвязные области можно получить теоремы, аналогичные предыдущей, для любых односвязных областей.

Наконец заметим, что в формулировке теоремы достаточно вместо $B_{k_0, 1}$ рассматривать любые области, содержащие область типа $B_{k_0, 1}$.

4. Пусть B_2 класс функций $\{ f(z) \}$ регулярных в $B_{k_0, 1}$ и

$$\iint_{B_{k_0, 1}} |f(z)|^2 dx dy < \infty.$$

Очевидно из доказанной нами теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Система функций $\{ f_{\eta}(z) \}$ в условии теоремы неполна в классе B_2 , т. е. существует в B_2 функция $f(z)$, для которой невозможно равенство

$$\inf \iint_{B_{k_0, 1}} |f(z) - f_{\eta}(z)|^2 dx dy = 0 \quad (9)$$

Интересно было бы охарактеризовать класс функций регулярных везде слева от L_{k_0} , для которых имела бы место полнота системы (S) в смысле (9), хотя бы в случае когда S — класс полиномов.

5. Условия указанной нами теоремы существенно ослабить нельзя. Так, например, если условие (3) заменить условием

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} > 1,$$

то система полиномов $(1) \{ P_n(z) \}$ будет полной в классе B_2 в области $B_{k_0, 1}$, поэтому, очевидно, не может быть нормальной в верхней полуплоскости.

Замена условия (2) условием

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \sec \alpha}{\ln |x|} > 1$$

тоже может привести к ненормальным семействам. Это можно доказать, построив некоторую область $B_{k_0,1}$, удовлетворяющую последнему неравенству, однако такую, что система функций $\{f_\eta(z)\}$ полна в ней.

Принцип построения такой области по существу известен (7,8).

Физико-математический Институт
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1945, сентябрь.

От автора

В нашей заметке в ДАН Арм. ССР, том I, № 1—2, стр. 5—8, 1944 г., по нашей оплошности допущены ошибки. На страницах 6, 7 и 8 неравенства (1'), (4') и (9) надо заменить соответственно неравенствами

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\lg \lg \frac{1}{p(z)} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-\gamma} \lg \frac{1}{|z-z_0|}}{\lg \lg \frac{1}{1-\alpha}} > 1$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\lg \lg \frac{1}{T(\rho)} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta-\gamma} \lg \frac{1}{\rho}}{\lg \lg \frac{1}{\rho}} > 1$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg \frac{1}{T(\rho)} - \inf \left\{ \frac{\pi}{z\pi-\alpha}; \frac{\pi}{\beta} \right\} \cdot \lg \rho}{\lg \lg \rho} \geq 2$$

Все остальные формулы, а также выводы статьи остаются в силе.

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիաների բնականի՛ր նորմալության մի հայտանիշի մասին

Նշվում է անալիտիկ ֆունկցիաների ընտանիքի նորմալության մի նոր հայտանիշ, որը ստացվում է ենթարկելով ամբողջ ընտանիքը որոշ սահմանափակման տվյալ տիրույթի եզրագծին կից որոշ ենթատիրույթում, և ապա սահմանափակելով առանձին ֆունկցիաների աճելու արագությունը եզրագծին կից տիրույթի մնացյալ մասում:

A. Schahinjan

Sur un critère de normalité de la famille de fonctions holomorphes

Soit $y = \Delta(x)$, $\Delta(x) > 0$
 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Delta(x) = 0$

représente une fonction uniforme continue et chaque intervalle fini peut se décomposer en nombres finis d'intervalles dans lesquels $\Delta(x)$ est continu.

Désignons par L_k une courbe représentée par l'équation $y = k \cdot \Delta(x)$ ($0 < k < 1$);

B_{k_1, k_2} est le domaine limité par les courbes L_{k_1} et L_{k_2} ; α est l'angle formé par la tangente de la courbe L_1 avec l'axe ox . Nous admettons que la direction positive de L_1 coïncide avec la direction positive de ox . Considérons les fonctions $\{f_\eta(z)\}$ qui sont déterminées par le paramètre η , ils sont réguliers à gauche d'une courbe L_{k_0} ($0 < k_0 < 1$) et continus jusqu'à cette courbe à l'exception peut-être du point $z = \infty$.

Nous admettons les fonctions $\{ f_{\tau_i}(z) \}$ appartenant à la classe S dans le domaine $B_{k_0,1}$, si

a) on peut signaler pour chaque fonction de cette famille une suite de nombres

$$r_{\tau_i,1} < r_{\tau_i,2} < \dots < r_{\tau_i,n} \rightarrow \infty$$

et pour toute cette famille un nombre constant $0 < p < 1$, de telle sorte que à gauche L_{k_0} sur l'arc $C_{r_{\tau_i,n}}$ du cercle $|z| = r_{\tau_i,n}$, soit

$$|f_{\tau_i}(z)| < c |z|^p$$

b) il existe les intégrales

$$\iint_{B_{k_0,1}} |f_{\tau_i}(z)|^2 dx dy.$$

Dans l'article présent nous démontrons le théorème suivant.

Théorème: Si

$$1) \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \sec \alpha}{\ln |x|} = m < 1$$

2) Dans le domaine $B_{k_0,1}$

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} = S < 1$$

3) Pour tous les τ_i

$$\iint_{B_{k_0,1}} |f_{\tau_i}(t)|^2 dx dy < M$$

on M est indépendant de τ_i , alors la famille $\{ f_{\tau_i}(z) \}$ est normale dans la partie du plan, à gauche de la courbe L_{k_0} .

Remarquons que dans la définition de la classe S la condition a) satisfait chaque famille de polynomes. Utilisant les résultats antérieurs de M. Keldych ainsi que les siens, l'auteur démontre que si dans le théorème précédent les conditions

$$\text{ou} \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \sec \alpha}{\ln |x|} = m < 1$$

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} = S < 1$$

sont remplacées respectivement par les conditions

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \sec \alpha}{\ln |x|} > 1$$

ou

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \frac{1}{\Delta(x)}}{\ln |x|} > 1$$

le théorème peut ne pas être juste.

Remarquons enfin que par la représentation conforme du demi-plan supérieur nous pouvons obtenir des théorèmes analogues pour chaque domaine simplement connexe.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Шагинян. ДАН СССР, 14, № 2, 1944.
2. М. Келдыш. Математический сборник, 5 (47), № 2, 1939.
3. А. Л. Шагинян. Изв. АН СССР, мат. сер. 5, № 4—5, 1941.