ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR
III 1945 1

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций

(Представлено В. А. Амбарцумяном 18 IX 1945)

Классическая формула Jensen-Nevanlinna позволяет получить каноническое представление тех мероморфных в единичном круге функций, которые имеют ограниченную характеристику $T(\rho)$ при $\rho \to 1$ ([1]).

В настоящей заметке приводится обобщение формулы Jensen-Nevanlinna, позволяющее получить вполне определенное каноническое представление более общих классов мероморфных в единичном круге функций.

1. Отнесем к классу $B_\delta(\alpha)$ ($\delta > 0$, $\alpha > -1$) все функции $f(z)$, голоморфные $|z| < 1$, для которых интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \, | f(\rho e^{i\vartheta}) |^\delta \rho d\rho d\vartheta \tag{1}$$

существует.

ТЕОРЕМА I. Если $f(z) \in B_\delta(\alpha)$ ($\delta > 1$), *тогда имеет место следующее интегральное представление функции* $f(z)$:

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{f(\rho e^{i\vartheta})}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}} \rho d\rho d\vartheta, \tag{2}$$

или

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{\operatorname{Re}\left\{ f(\rho e^{i\vartheta}) \right\}}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}} \rho d\rho d\vartheta \tag{2^1}$$

в единичном круге $|z| < 1$.

2. Пусть $F(z)$ мероморфна в единичном круге; $\{ a_\mu \}$ и $\{ b_\nu \}$ означают соответственно последовательности нулей и полюсов функции $F(z)$, расположенные в $|z| < 1$ и отличные от $z=0$.

Располагаем эти числа в порядке возрастания их модулей

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_\mu| \leqslant \ldots$$

$$0 < |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots \leqslant |b_\nu| \leqslant \ldots$$

причем нули или полюсы входят в эти последовательности соответственно их кратности. Очевидно, что если они имеются не в конечном числе, то

$$\lim_{\mu \to \infty} |a_\mu| = \lim_{\nu \to \infty} |b_\nu| = 1.$$

Пусть в окресности $z=0$ имеем разложение в ряд Лорана

$$F(z) = C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \ldots, \qquad (C_\lambda \neq 0)$$

где λ положительное или отрицательное целое число или нуль.

Целые числа $\mu(p)$ и $\nu(p)$ $(0 < p < 1)$ определим из неравенств

$$|a_{\mu(p)}| < p < |a_{\mu(p)+1}|, \quad |b_{\nu(p)}| < p < |b_{\nu(p)+1}|.$$

Применяя теорему I к функции

$$F(pz)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu(p)}\left(1-\frac{pz}{b_\nu}\right)}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu(p)}\left(1-\frac{pz}{a_\mu}\right)},$$

голоморфной в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, получаем:

$$\lg F(pz) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \frac{\lg|F(p\rho e^{i\vartheta})|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta +$$

$$+\lg\prod_{\mu=1}^{\mu(p)}\left(1-\frac{pz}{a_\mu}\right)e^{-U_\alpha\left(z;\frac{a_\mu}{p}\right)} - \lg\prod_{\nu=1}^{\nu(p)}\left(1-\frac{pz}{b_\nu}\right)e^{-U_\alpha\left(z;\frac{b_\nu}{p}\right)} +$$

$$+\lambda\lg z + 4\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha\lg\frac{1}{\rho}\rho d\rho - \lg\overline{C}_\lambda \ (\alpha > -1), \tag{3}$$

при $|z| < 1$, где

$$U_\alpha(z;\zeta) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \frac{\lg\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta \tag{3^1}$$

Функция $U_\alpha(z;\zeta)$ удовлетворяет рекурентному соотношению

$$U_{\alpha-1}(z;\zeta) - U_\alpha(z;\zeta) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+1}, \tag{4}$$

при $|z|<1$ и $|\zeta|<1$. Кроме того

$$U_{-1}(z;\zeta)=\lg\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta|^2}. \tag{5}$$

Таким образом, если $q\geqslant 0$ целое число, тогда

$$U_q(z;\zeta)=-\lg\frac{|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}-\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{j+1} \tag{6}$$

Формула (3) является обобщением известной формулы Jensen-Nevanlinna. Действительно, из формулы (5) предельным переходом при $\alpha\to-1$ и заменой ρz через z получаем указанную формулу

$$\lg F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg|F(\rho e^{i\vartheta})|\frac{\rho e^{i\vartheta}+z}{\rho e^{i\vartheta}-z}d\vartheta+$$

$$+\lg\prod_{\mu=1}^{\mu(\rho)}\frac{\rho(a_\mu-z)}{\rho^2-\bar a_\mu z}-\lg\prod_{\nu=1}^{\nu(\rho)}\frac{\rho(b_\nu-z)}{\rho^2-\bar b_\nu z}-\lambda\lg\rho\ (|z|<\rho). \tag{7}$$

Доказывается:

ТЕОРЕМА II. Для любой последовательности чисел

$\{z^k\}$, $|z_k|<1$

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\ldots\leqslant|z_k|\leqslant\ldots\qquad\lim_{k\to\infty}|z_k|=1,$$

для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\qquad(\alpha>-1)$$

сходится, бесконечное произведение

$$\pi_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(z;z_k)}, \tag{8}$$

где $U_\alpha(z;z_k)$ *определяется по формуле* (3[1]), *равномерно и абсолютно сходится в каждой замкнутой части единичного круга* $|z|<1$ *и представляет аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на указанной последовательности точек.*

Заметим, что при $\alpha=-1$ в силу (5) получаем известное бесконечное произведение Бляшке

$$\pi_{-1}(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar z_k z}\,\bar z_k$$

3. Если характеристика $T(\rho)$ мероморфной функции $F(z)$ удовлетворяет условию

$$(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho)^\alpha T(\rho)\,d\rho<+\infty,\qquad(\alpha>-1)$$

тогда ряды

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(1-|a_\mu|)^{\alpha+2}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|b_\nu|)^{\alpha+2} \text{ сходятся } (^1).$$

Совершая предельный переход в (3) при $p \to 1-0$, получаем:

ТЕОРЕМА III. Если функция $F(z)$ *мероморфна в единичном круге* $|z|<1$ *и*

$$(\alpha+1)\int_0^1 (1-\rho)^\alpha T(\rho)\,d\rho < +\infty, \qquad (\alpha>-1),$$

тогда она представляется в следующем каноническом виде:

$$F(z)=Kz^\lambda \frac{\pi_\alpha(z;a_\mu)}{\pi_\alpha(z;b_\nu)} \exp\left\{\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha \frac{\lg|F(\rho e^{i\vartheta})|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta\right\}, \quad (9)$$

где $\pi_\alpha(z;a_\mu)$ *и* $\pi_\alpha(z;b_\nu)$ *определяются из (8), и*

$$K=\frac{1}{C_\lambda}\exp\left\{4\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha \lg\frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\right\} \quad (10)$$

Формула (9) является естественным обобщением теоремы Nevanlinna о представимости мероморфных в единичном круге функций, имеющих ограниченную характеристику.

Можно показать, что указанная теорема Nevanlinna может быть получена из (9) предельным переходом при $\alpha \to 1-0$.

Если $q \geqslant 0$ целое число, тогда в силу формул (4) и (5)

$$\pi_q(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar z_k z}\,\bar z_k\, e^{\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar z_k z}\right)^{j+1}} \quad (11)$$

Отсюда

ТЕОРЕМА IV. Пусть q *— наименьшее целое число, для которого*

$$\int_0^1(1-\rho)^q\,T(\rho)\,d\rho<+\infty,$$

тогда функция $F(z)$ *представляется в каноническом виде*

$$F(z)=Kz^\lambda\frac{\pi_q(z;a_\mu)}{\pi_q(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{q+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^q\frac{\lg|f(\rho e^{i\vartheta})|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{q+2}}\rho\,d\rho\,d\vartheta\right\},$$

где $\pi_q(z; a_\mu)$ *и* $\pi_q(z; b_\nu)$ *определяются из (11) и*

$$K = \frac{1}{C_\lambda} \exp \left\{ 4\lambda(q+1) \int_0^1 (1-\rho^2)^q \lg \frac{1}{\rho} \rho d\rho \right\}.$$

В заключение отметим, что произведения, подобные (11), были применены Picard'ом и Nevanlinn'ой ([2]) для канонического представления мероморфных в единичном круге функций, но экспоненциальный множитель в каноническом представлении мероморфной функции у них не определен в явном виде.

Физико-математический Институт
Академии Наук Арм. ССР
Ереван, 1945, август.

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաները կանոնական տեսքով ներկայացնելու մասին

Jensen-Nevanlinn-ի ֆորմուլան հնարավորություն է տալիս, միավոր շրջանում, կանոնական տեսքով ներկայացնել սահմանափակ T(ρ) խարակտերիստիկով ֆունկցիաները միայն ([1])։

Ներկա հոդվածում կառուցված է մի նոր ֆորմուլա, որը մասնավոր դեպքում վեր է ածվում Jensen-Nevanlinn-ի ֆորմուլային և հնարավորություն է տալիս կանոնական տեսքով ներկայացնել մերոմորֆ ֆունկցիաների շատ ավելի ընդարձակ դասեր։ Այս եղանակի առավելությունը պետք համարել այն, որ կանոնական արտահայտության մեջ ցուցիչային արտադրիչը ստացվում է որոշակի տեսքով։

M. M. Djrbachian

Sur la manière de représenter les fonctions méromorphes sous forme canonique dans le cercle unité

On démontre que

1) Si $F(z)$ est méromorphe dans le cercle-unité $|z| < 1$, $\{a_\mu\}$ et $\{b_\nu\}$ représentent respectivement ses zéros et ses pôles différents de $z=0$, se trouvant dans le cercle $|z| < 1$ et qui sont classés d'après l'ordre de la progression de leurs modules; dans ce cas, pour chaque ρ $(0<\rho<1)$ et $\alpha > -1$, on a

$$\lg F(\rho z) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{\lg|F(\rho\rho e^{i\vartheta})|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}} \rho d\rho d\vartheta +$$

$$+ \lg \prod_{\mu=1}^{\mu(p)} \left(1 - \frac{\rho z}{a_\mu}\right) e^{-U_\alpha\left(z; \frac{a_\mu}{\rho}\right)} - \lg \prod_{\nu=1}^{\nu(p)} \left(1 - \frac{\rho z}{b_\nu}\right) e^{-U_\alpha\left(z; \frac{b_\nu}{\rho}\right)} +$$

$$+\lambda \lg z+4\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha \lg\frac{1}{\rho}\,\rho d\rho-\lg \bar{C}_\lambda\ , \qquad (1)$$

quand $|z|<1$; où

$$U_\alpha(z;\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\lg\left|1-\frac{\rho e^{i\vartheta}}{\zeta}\right|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\vartheta,$$

et C_λ représente le premier coëfficient différent de zéro de la série de Laurent de la fonction $F(z)$ au voisinage du point $z=0$, tandis que les nombres entiers $\mu(p)$ et $\nu(p)$ se déterminent par les inégalités

$$|a_{\mu(p)}|<p<|a_{\mu(p)+1}|\ ; \quad |b_{\nu(p)}|<p<|b_{\nu(p)+1}|$$

La formule (1) représente la généralisation de la formule connue de Jensen-Nevanlinna Cette dernière [1] s'obtient en passant à la limite $\alpha\to-1+0$

2) Si $F(z)$ est une fonction méromorphe, dans le cercle—unité $|z|<1$ et si $T(\rho)$ est sa caractéristique qui satisfait à la condition

$$(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho)^\alpha\ T(\rho)d\rho<+\infty \quad (\alpha>-1),$$

alors elle peut être représentée sous la forme canonique suivante:

$$F(z)=Kz^\lambda\frac{\pi_\alpha(z;a_\mu)}{\pi_\alpha(z;b_\nu)}\cdot e^{\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{\lg|F(\rho e^{i\vartheta})|}{\left(1-z\rho e^{-i\vartheta}\right)^{\alpha+2}}\rho d\rho d\vartheta} \qquad (2)$$

où

$$\pi_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(z;z_k)} \qquad (3)$$

$$K=\frac{1}{C_\lambda}\exp\left\{4\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha\lg\frac{1}{\rho}\,\rho d\rho\right\}, \qquad (4)$$

tandis que C_λ, $\{a_\mu\}$ et $\{b_\nu\}$ ont le sens signalé au premier point.

On démontre que, si $q>0$ est un nombre entier, alors

$$\pi_q(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\bar{z}_k\, e^{\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)^{j+1}} \qquad (5)$$

et

$$\pi_{-1}(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \bar{z}_k$$

La formule (2) représente la généralisation du théorème de Nevanlinna.
Ce théorème de Nevanlinna ([1]) s'obtient de (2) en passant à la limite. $\alpha \to -1+0$

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, стр. стр. 165. 202, 268, ОГИЗ, М.—Л., 1941. 2. Цит. по King-Zai Hiong. „Journal de Liouville" 45. 269—276. 1935.